الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التعليم الثانوي العام



السنة الأولى من التعليم الثانوي

طبعة منقحة

الجذعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا

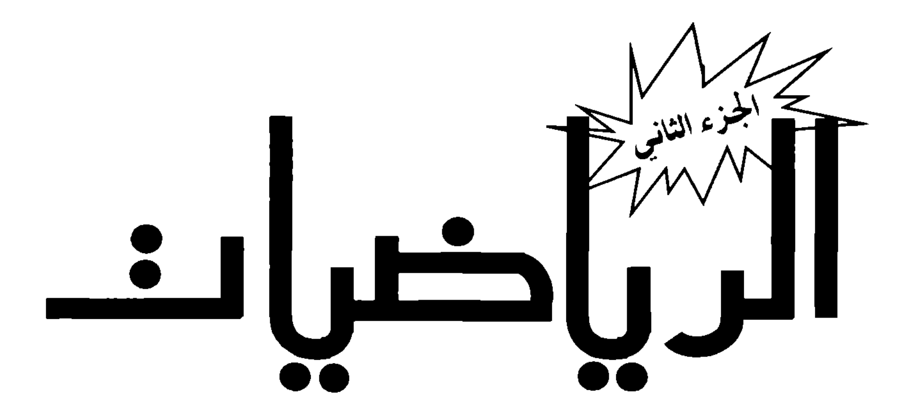


الديوان الوطني للمطبوعات المدرسية

الجمهوريـــــة الجزائريـــــة الديمقراطيـــــة الشعبيـــــة

وزارة التربيـــــة الوطنيـــــة

مديرية التعليم الثانوي العام



السنة الأولى من التعليم الثانوي

طبعة منقحة

الجذعان المشتركان:

- علوم
- تكنولوجيا



المـؤلفـون

عبد القادر سامي مفتش التربية والتكوين
محمـد عـوان مفتـش التربيـة والتكويـن
السيـدة كشيـش أستـاذة التعليم الثانوي
قويـدر فـلاح أستـاذ التعليـم الثـانوي
منصور بوخلوف أستاذ التعليم الثـانوي

تعديل

عبد القادر سامي مفتش التربية والتكوين
محمـد عـوان مفتـش التربيـة والتكويـن
خـالد محتـوت أستـاذ ريـاضيـات

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة :

لعل من المسلم به أن الكتاب المدرسي،وخاصة في نظامنا التربوي وفي الوضع الراهن، يعتبر في مقدمة الوثائق التربوية والوسائل الأساسية بالنسبة لعملية التعليم والتعلم. فوجوده يكتسي أهمية بالغة سواء بالنسبة للتلميذ أو الأستاذ. إذ هو مرجع للأول وسند بيداغوجي للثاني. والواقع أن بعض الكتب المستعملة في مرحلة التعليم الثانوي، والتي يعود تاريخ إصدار أكثرها إلى الثمانينات، اصبحت لا تساير المناهج لا من حيث المحتوى ولا من حيث المنهجية، نظرا لما اعترى برامج هذه المرحلة التعليمية من تغيير وتعديل، خاصة مع بداية العشرية الجارية التي عرف فيها التعليم الثانوي تغييرات معتبرة شملت بنيته ومحتواه. الأمر الذي زاد في اتساع رقعة التباين وقلة الانسجام بين البرامج التعليمية، والكتب المدرسية المتداولة التي بقيت كما هي منذ تأليفها.

وفي إطار الإجراءات التحسينية الشاملة والمتكاملة، ولمعالجة النقائص والاختلالات البينة والعمل باستمرار على ترقية العوامل والوسائل التي تسهم في تحقيق الأهداف التربوية المسطرة، رأينا أن نشرع هذه السنة وتحضيرا للدخول المدرسي 1999 / 2000 في عملية تصحيح وتعديل وإثراء مضامين الكتب المدرسية المستعملة وتكييف محتوياتها - ما أمكن ذلك - مع البرامج المطبقة، مع مواصلة إعداد كتب جديدة لتغطية جميع المواد المدرسة والأساسية منها على الخصوص. هذا إلى جانب الإعداد لبناء مناهج جديدة - في إطار الإصلاح - ثم وضع كتب موافقة لها.

وتجدر الإشارة بهذا الصدد، إلى أن قضية الكتاب المدرسي لا تكمن في نوعيته وتوفره بين أيدي التلاميذ فحسب، بل تتعدى ذلك إلى كيفية استعماله بفعالية وإدراك وظيفته وأساليب استثمار محتوياته والانتفاع به. وهي أمور ينبغي للسادة الأساتذة أن يولوها العناية والاهتمام اللازمين.

أخيرا، نأمل أن يكون في هذا العمل ما يعزز جهود الأساتذة ويساعدهم على أداء مهامهم التربوية، وأن يجد فيه التلاميذ الأداة المشوقة والمحفزة على العمل والاجتهاد في طلب العلم.

والله ولي التوفيق
مدير التعليم الثانوي العام

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة :

هذا الكتاب موجه إلى أساتذة وتلاميذ السنة الأولى من التعليم الثانوي جذعان مشتركان علوم وتكنولوجيا

وهو موافق للبرنامج الرسمي الذي تم إصداره سنة 1995،

لقد صيغت جميع دروس هذا الكتاب بما يناسب مستوى التلميذ من بسيط الأسلوب اللغوي مع الحرص على الدقة في التعبير عن المفاهيم الرياضية.

يتكون هذا الكتاب من جزئين وكل باب منها يحتوي على عدة دروس.

الجزء الأول تحتوي على خمسة أبواب

والجزء الثاني يحتوي على أربعة أبواب

توجد في آخر كل باب تمارين كثيرة ومتنوعة، يمكن للأستاذ إستغلالها والإستفادة منها لترسيخ المفاهيم وإعطاء التلاميذ فرصة للتفكير في القسم أو في المنزل.

الباب الأول خاص بالمنطق الذي ينبغي تدريسه من حيث الإستعمال وليس من شأن ذاته.

الباب الثاني (الحساب العددي) والباب الثالث (الهندسة المستوية) خاصان بمراجعات وتتمات أساسية تقدم في بداية العام الدراسي ويتم الرجوع إليها كلما إقتضت الضرورة ذلك.

الباب الرابع (العلاقات ، التطبيقاتة ، العمليات الداخلية ، البني الجبرية) ينبغي تقديم مواضعه بالدقة اللازمة دون التوسع في دراستها.

الباب الخامس (الأشعة) والباب السادس (المعادلات والمتراجحات) هامان جدًا ويلعبان دورًا أساسيًا في المراحل المقبلة.

الباب السابع (حساب المثلثات) والباب الثامن (الدوال العددية) يزودان التلميذ بالعناصر الأولية والأساسية في حساب المثلثات وفي التحليل.

الباب التاسع (الهندسة الفضائية) يساعد التلميذ على تصور الأشكال في الفضاء.

وأخيرا نرجو من كل الذين يستعملون هذا الكتاب أن يوافونا بكل الانتقادات والملاحظات والإقتراحات التي من شأنها تحسين نوعية هذا الكتاب وجعله أكثر ملاءمة مع تطبيقها واستعمالها في الأقسام.

والله ولي التوفيق

المؤلفون

الباب السادس

المعادلات والمتراجحات

تعتبر المواضيع الواردة في هذا الباب من أهم المواضيع المدروسة في السنة الأولى من التعليم الثانوي ، إذ أنها تمكن التلميذ من التحكم في آليات الحساب الجبري مثل النشر ، التحليل والاختزال . وتدربه على الاستعمال الدقيق والسليم للتكافؤات والاستلزامات وأنها تزوده بالوسائل والأدوات الرياضية التي يحتاج إليها في الدروس المقبلة ، إذ لها تطبيقات كثيرة ومفيدة مثلاً في دراسة الدوال وفي دراسة إشارة المشتقات .

20 كثيرات الحدود

1 ـ كثيرات الحدود لمتغير حقيقي :

1.1 ـ وحيدات الحدّ لمتغير حقيقي

التعريف

إذا كان $ا$ عدداً حقيقياً وكان $ن$ عدداً طبيعياً فإن : الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي $ا\,س^{ن}$ تسمى دالة وحيد الحدّ .

- العدد الحقيقي $ا\,س^{ن}$ يدعى **وحيد الحدّ** للمتغير الحقيقي س .
- العدد الحقيقي $ا$ يسمى **معامل** وحيد الحدّ $ا\,س^{ن}$.
- إذا كان $ا \neq 0$ فإن العدد الطبيعي $ن$ يسمى **درجة** وحيد الحدّ $ا\,س^{ن}$
- إذا كان $ا = 0$ فإن وحيد الحدّ $ا\,س^{ن}$ يسمى **وحيد الحدّ المعدوم** .
  نلاحظ أن درجة وحيد الحدّ المعدوم **غير معينة** .
- وحيدات الحدّ التي لها نفس الدرجة تسمى **وحيدات الحدّ المتشابهة** .
- أمثلة :

1) $-2\,س^{3}$ هو وحيد حدّ درجته 3 ومعامله (-2)

2) $(1-\sqrt{2})\,س^{4}$ هو وحيد حدّ درجته 4 ومعامله $(1-\sqrt{2})$

3) كل عدد حقيقي **ثابت** $ا$ هو وحيد حدّ درجته 0 ومعامله $ا$.

4) $\frac{1}{س}$ وَ $2\sqrt{س}$ ليسا وحيدي حدّ لأنه لا يمكن كتابتهما على الشكل $ا\,س^{ن}$ مع $ن$ عدد طبيعي .

2.1 ـ كثيرات الحدود لمتغير حقيقي

التعريف

كثير الحدود للمتغير الحقيقي س هو مجموع وحيدات حدّ للمتغير الحقيقي س .

مثال :

ك (س) = − 4 س^{2} + 5 س^{5} + س^{3} − 3 س^{2} + 2 س − س^{3} − 8
− 8 س + 4 .

ك (س) هو كثير حدود للمتغير الحقيقي س .

باستعمال قواعد الحساب في ح يمكن كتابته كما يلي :

ك (س) = 5 س^{5} − 7 س^{2} − 6 س − 4 .

وهذه الكتابة تسمى **الشكل المبسط والمرتب** لكثير الحدود ك (س) .

- **الدالة كثير الحدود .**

الدالة تا التي ترفق بكل عدد حقيقي س كثير الحدود تا (س) تسمى **دالة كثير الحدود** .

- **كثير الحدود المعدوم**

كثير الحدود المعدوم هو كثير حدود تا (س) يحقق ما يلي :

$\forall$ س $\in$ ح : تا (س) = 0

- **الكتابة العامة لكثير حدود مبسط ومرتب**

يمكن كتابة أي كثير حدود تا (س) مبسط ومرتب وغير معدوم على الشكل العام التالي :

تا(س) = أ$_{ن}$ س^{ن} + أ$_{ن-1}$ س$^{ن-1}$ + ... + أ$_{1}$ س + أ$_{0}$ حيث أ$_{ن}$ $\neq 0$

- العدد الطبيعي ن يسمى **درجة كثير الحدود تا (س)** .
- وحيدات الحدّ أ$_{ن}$ س^{ن} ؛ أ$_{ن-1}$ س$^{ن-1}$ ؛ ..... أ$_{1}$ س ؛ أ$_{0}$ تسمى **حدود كثير الحدود تا (س)** .
- الأعداد الحقيقية أ$_{ن}$ ، أ$_{ن-1}$ ؛ ..... ؛ أ$_{1}$ ؛ أ$_{0}$ تسمى **معاملات كثير الحدود تا (س)** .

أمثلة :

1) كل كثير حدود من الدرجة الأولى يكتب على الشكل العام :

$$ا س + ب \qquad \text{حيث } ا \neq 0$$

2) كل كثير حدود من الدرجة الثانية يكتب على الشكل العام :

$$ا س^2 + ب س + ح \qquad \text{حيث } ا \neq 0$$

3) كل كثير حدود من الدرجة الثالثة يكتب على الشكل العام :

$$ا س^3 + ب س^2 + ح س + ء \qquad \text{حيث } ا \neq 0$$

درجتا مجموع وجداء كثيري حدود

نذكر فيما يلي نتيجتين تتعلقان بدرجتي مجموع وجداء كثيري حدود .

- إن درجة مجموع كثيري حدود هي أصغر من أو تساوي درجة كثير الحدود الذي له أكبر درجة

مثلاً : إذا كان

1) تا (س) = $س^2 - س$ وَ ها (س) = $- س^2 + 2 س + 1$

فإن تا (س) + ها (س) = س + 1

نلاحظ في هذا المثال أن درجة(تا (س) + ها (س)) تساوي 1 وهي أصغر من درجتي تا (س) و ها (س) .

2) ك (س) = $س^3 - 2$ وَ ها (س) = $- س^2 + 2 س + 1$

فإن ك (س) + ها (س) = $س^3 - س^2 + 2 س - 1$

نلاحظ في هذا المثال أن درجة(ك (س) + ها (س)) تساوي درجة ك (س) الذي له أكبر درجة .

- إن درجة جداء كثيري حدود تساوي مجموع درجتيهما

مثلاً : إذا كان

تا (س) = $س^3 - س$ وَ ها (س) = $- س^2 + 2 س - 1$

فإن تا (س) × ها (س) = $- س^5 + 2 س^4 - 2 س^2 + س$

نلاحظ أن درجة (تا (س) × ها (س)) هي 5 وتساوي مجموع درجتي تا (س) وَ ها (س) .

3.1 ـ كثير الحدود المعدوم

لقد رأينا أن كثير الحدود المعدوم هو كثير الحدود تا (س) بحيث :

∀ س ∈ ح   تا (س) = 0

نقبل النتيجة التالية :

يكون كثيرُ حدودٍ مبسط كثيرَ الحدود المعدوم إذا وفقط إذا كانت كل معاملاته معدومة .

أي بعبارة أخرى :

$$[\forall \text{س} \in \text{ح} : \text{أ}_{\text{ه}}\text{س}^{\text{ه}} + \text{أ}_{\text{ه}-1}\text{س}^{\text{ه}-1} + \dots + \text{أ}_0 = 0] \Longleftrightarrow \text{أ}_{\text{ه}} = \text{أ}_{\text{ه}-1} = \dots = \text{أ}_{\text{ن}} = 0$$

تطبيق : يمكن استعمال هذه النتيجة للبحث عن العنصر الحيادي لعملية داخلية

مثلاً : إذا كانت ★ عملية داخلية في ح حيث :

س ★ ع = (س + 2) (ع + 2) − 2

فإن العنصر الحيادي ه (إن وجد) معرف كما يلي :

∀ س ∈ ح : س ★ ه = س (لأن ★ عملية تبديلية)

[∀ س ∈ ح : س ★ ه = س]

⟺ [∀ س ∈ ح : (س + 2) (ه + 2) − 2 = س]

⟺ [∀ س ∈ ح : (ه + 1) س + (2 ه + 2) = 0] (1)

القضية (1) تعني أن كثير الحدود (ه + 1) س + (2 ه + 2) هو كثير الحدود المعدوم .

إذن :

[∀ س ∈ ح : (ه + 1)س + (2 ه + 2) = 0]

⇕

(ه + 1 = 0 وَ 2 ه + 2 = 0)

أي : ه = − 1

إذن العنصر الحيادي للعملية ★ هو (− 1) .

4.1 ـ تساوي كثيري حدود

التعريف

> يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا تحقق ما يلي :
>
> ∀ س ∈ ح : تا (س) = ها (س)

نقبل النظرية التالية :

يتساوى كثيرا حدود مبسطان إذا وَفقط إذا كانت لها نفس الدرجة وكانت معاملات وحيدات الحدّ المتشابهة فيهما متساوية

مثلاً :

تا (س) = (ا + 1) س^2 − ب س + حـ

ها (س) = 2 ا س^2 + س + 2 ب

يتساوى كثيرا الحدود تا (س) و ها (س) إذا وفقط إذا كان :

{ ا + 1 = 2 ا وَ − ب = 1 وَ حـ = 2 ب } أي { ا = 1 وَ ب = − 1 وَ حـ = − 2 }

2 . تحليل كثير حدود : إن تحليل كثير حدود هو كتابته على شكل جداء كثيرات حدود نذكر فيما يلي بعض القواعد التي تسمح بتحليل كثير حدود

1.2 ـ التحليل بواسطة عامل مشترك

يمكن كتابة مجموع جداءات لها عامل مشترك على شكل جداء حسب القاعدة التالية : $أس + أع + أص = أ(س + ع + ص)$

أمثلة :

1) $5س^2ع^2 - 2س^3ع = س^2ع.(5ع - 2س)$

2) $سع + س - ع - 1 = س(ع + 1) - (ع + 1)$

$= (ع + 1)(س - 1)$

3) $س^3 + سع + س^2ع + ع^2 = (س^3 + س^2ع) + (سع + ع^2)$

$= س^2(س + ع) + ع(س + ع)$

$= (س + ع)(س^2 + ع)$

2 . 2 ـ التحليل باستعمال المتطابقات الشهيرة :

نذكر فيما يلي بعض المتطابقات الشهيرة المدروسة خلال السنوات السابقة .

$(أ + ب)^2 = أ^2 + 2أب + ب^2$

$(أ - ب)^2 = أ^2 - 2أب + ب^2$

$(أ + ب)(أ - ب) = أ^2 - ب^2$

$(أ + ب)^3 = أ^3 + 3أ^2ب + 3أب^2 + ب^3$

$(أ - ب)^3 = أ^3 - 3أ^2ب + 3أب^2 - ب^3$

$أ^3 + ب^3 = (أ + ب)(أ^2 - أب + ب^2)$

$أ^3 + ب^3 = (أ - ب)(أ^2 + أب + ب^2)$

أمثلة : توضح الأمثلة التالية فكرة استعمال المتطابقات الشهيرة في تحليل كثيرات الحدود .

1) $تا(س) = (4س - 3)^2 - (7س - 1)^2$

تا (س) = (4 س − 3 + 7 س − 1) (4 س − 3 − 7 س + 1)

= (11 س − 4) (− 3 س − 2)

= − (11 س − 4) (3 س + 2)

2) تا (س) = س^{4} + 2 س^{2} + 1

= (س^{2} + 1)^{2}

3) تا (س) = س^{3} − 2 س^{2} + س

= س (س^{2} − 2 س + 1)

= س (س − 1)^{2}

4) تا (س) = 8 س^{3} + 12 س^{2} + 6 س + 1

= (2 س + 1)^{3}

5) تا (س) = س^{3} − 8

= (س − 2) (س^{2} + 2 س + 4)

6) تا (س) = س^{4} − 1

= (س^{2} − 1) (س^{2} + 1)

= (س − 1) (س + 1) (س^{2} + 1)

3 ـ جذور كثير حدود :

3 . 1 التعريف

يكون العدد الحقيقي α جذراً لكثير الحدود تا (س) إذا وفقط إذا كان تا (α) = 0

مثلا :

- العددان 2 و (− 2) هما جذران لكثير الحدود تا (س) = س^{2} − 4
  لأن تا (2) = 0 و تا (− 2) = 0
- الأعداد (− 1) ، 0 ، 1 ليست جذوراً لكثير الحدود
  تا (س) = س^{2} − 4 لأن : تا (− 1) $\neq$ 0 و تا (0) $\neq$ 0 و تا (1) $\neq$ 0

3 . 2 ــــ النظرية

إذا كان α جذراً لكثير حدود تا (س) فإنه يوجد كثير حدود ك (س) يحقق ما يلي :

تا (س) = (س − α) . ك (س)

ملاحظة :

إذا كانت درجة كثير الحدود تا (س) هي ن فإن درجة كثير الحدود ك (س) هي (ن − 1) .

مثال : تا (س) = س^3 − 5 س^2 + 5 س − 1

نلاحظ أن تا (1) = 0 . إذن العدد 1 هو جذر لكثير الحدود تا (س) .

حسب النظرية السابقة ، يوجد كثير حدود من الدرجة الثانية (أ س^2 + ب س + حـ) بحيث يكون :

تا (س) = (س − 1) (أ س^2 + ب س + حـ)

أي تا (س) = أ س^3 + (ب − أ) س^2 + (حـ − ب) س − حـ

وبتطبيق نظرية تساوي كثيري حدود نستنتج أن :

أ = 1 ، ب − أ = −5 ، حـ − ب = +5 ، − حـ = −1

أي : أ = 1 ، ب = −4 ، حـ = 1

إذن : تا (س) = (س − 1) (س^2 − 4 س + 1)

4 ـ الدوال الناطقة والكسور الناطقة :

4 . 1 ـ التعريف

تا (س) و ها (س) كثيرا حدود .

الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ تسمى دالة ناطقة

• العدد الحقيقي $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ يسمى كسراً ناطقاً

• يكون الكسر الناطق $\frac{\text{تا (س)}}{\text{ها (س)}}$ معرفاً إذا وفقط إذا كان مقامه ها (س) يختلف عن الصفر .

أمثلة :

1) ك (س) = $\frac{\text{س} - 1}{\text{س}^2 + 1}$ هو كسر ناطق معرف في مجموعة الأعداد الحقيقية لأن : ∀ س ∋ ح : $\text{س}^2 + 1 \neq 0$

2) كا (س) = $\frac{2\text{س} - 3}{\text{س} - 1}$ هو كسر ناطق معرف في المجموعة ح − { 1 }

4 . 2 ـ اختزال الكسور الناطقة

توضح الأمثلة التالية كيفية اختزال الكسور الناطقة :

المثال 1 : ك (س) = $\frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}^2 - 2\text{س} + 1}$

تكون الدالة الناطقة ك معرفة إذا وفقط إذا كان

$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 \neq 0$

أي $(\text{س} - 1)^2 \neq 0$ أي $\text{س} \neq 1$

إذن مجموعة التعريف ف للدالة ك هي ف = ح − { 1 }

لنختزل ك (س) . لدينا : $\text{س}^2 - 1 = (\text{س} - 1)(\text{س} + 1)$

$\text{س}^2 - 2\text{س} + 1 = (\text{س} - 1)^2$

ومنه : ك (س) = $\frac{(\text{س} - 1)(\text{س} + 1)}{(\text{س} - 1)^2}$

لما س ∋ ف يكون : $\text{س} - 1 \neq 0$

يمكن،عندئذ . قسمة حدّي الكسر ك (س) على (س − 1)

فنحصل على : $ك(س) = \frac{س + 1}{س - 1}$

إذن ∀ س ∋ ف : $ك(س) = \frac{س + 1}{س - 1}$

المثال 2 : $ل(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 - 1}$

تكون الدالة الناطقة ل معرفة إذا وفقط إذا كان :

$س^2 - 1 \neq 0$

أي $(س - 1)(س + 1) \neq 0$ أي $س \neq 1$ و $س \neq -1$

إذن مجموعة التعريف ف للدالة ل هي ف = ح − { −1 ، +1 }

لنختزل ل (س) .

لدينا : $س^3 - 1 = (س - 1)(س^2 + س + 1)$

$س^2 - 1 = (س - 1)(س + 1)$

ومنه : $ل(س) = \frac{(س - 1)(س^2 + س + 1)}{(س - 1)(س + 1)}$

لما س ∋ ف يكون $س - 1 \neq 0$

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر ل (س) على (س − 1)

فنحصل على : $ل(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$.

إذن ∀ س ∋ ف : $ل(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$

ملاحظة : لتكن الدالة الناطقة ها المعرفة كما يلي :

ها $(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س + 1}$ ، **الدالتان الناطقتان ل وَ ها غير متساويتين**

لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

مثال 3 :

$$تا (س) = \frac{س^3 + 1}{س + 1}$$

تكون الدالة الناطقة تا معرفة إذ وفقط إذا كان

. س + 1 ≠ 0 أي س ≠ − 1

إن مجموعة التعريف ف للدالة تا هي ف = ح − { − 1 }

لنختزل تا (س) .

لدينا : $س^3 + 1 = (س + 1) (س^2 − س + 1)$

$$ومنه : تا (س) = \frac{(س + 1) (س^2 − س + 1)}{س + 1}$$

لما س ∋ ف يكون س + 1 ≠ 0

يمكن ، عندئذ ، قسمة حدّي الكسر تا (س) على (س + 1)

فنحصل على تا (س) = $س^2 − س + 1$

إذن ∀ س ∋ ح − { − 1 } : تا (س) = $س^2 − س + 1$

ملاحظة :

لتكن الدالة كثير الحدود ها حيث ها (س) = $س^2 − س + 1$

الدالتان تا و ها غير متساويتين لأن مجموعتي تعريفهما مختلفتان .

---

21 المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

1 ـ عموميات :

1.1 ـ مفهوم المعادلة

إذا كانت تا و ها دالتين لمجموعة ك في مجموعة ل فإن حل المعادلة تا (س) = ها (س) في المجموعة ك يعني تعيين مجموعة العناصر س من ك التي لها نفس الصورة بواسطة الدالتين تا و ها .
هذه المجموعة تسمى **مجموعة حلول** المعادلة تا (س) = ها (س) في ك .

مثال 1 :

تا و ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث :
تا (س) = 3 س^2 – س – 5 ؛ ها (س) = 2 س^2 – 2 س + 1
العددان 2 و (– 3) حلان للمعادلة تا (س) = ها (س)
لأن : تا (2) = ها (2) وَ تا (– 3) = ها (– 3)
بينما الأعداد (– 2) ، 0 ، $\sqrt{2}$ ليست حلولا لهذه المعادلة
لأن : تا (– 2) ≠ ها (– 2) ؛ تا (0) ≠ ها (0) ؛
تا ($\sqrt{2}$) ≠ ها ($\sqrt{2}$) .

مثال 2 :

تا وَ ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث :
تا (س) = س^2 ؛ ها (س) = س
لنبحث عن ي مجموعة حلول المعادلة تا (س) = ها (س) .

أولا : إذا كان α عنصراً من ي فإنه يحقق المساواة

$\alpha^2 = \alpha$ أي $\alpha^2 - \alpha = 0$

وَبالتالي : $\alpha(\alpha - 1) = 0$

وهذا يعني أن : $\alpha = 0$ أو $\alpha = 1$

إذن $\alpha \in \{0 ، 1\}$. أي ي $\subset \{0 ، 1\}$ (1)

ثانياً : من الواضح أن العددين 0 وَ 1 حلان للمعادلة المعطاة لأن تا (0) = ها (0) وَ تا (1) = ها (1) .

إذن $\{0 ، 1\} \subset$ ي (2)

من (1) وَ (2) نستنتج : ي $= \{0 ، 1\}$

2.1 ـ مفهوم المتراجحة

إذا كانت تا وَ ها دالتين لمجموعة ك في مجموعة الأعداد الحقيقية ح .
فإن حل المتراجحة تا (س) $\geqslant$ ها (س)
(أو تا (س) > ها (س)) في ك يعني تعيين مجموعة العناصر س من ك التي تحقق المتباينة تا (س) $\geqslant$ ها (س) (أو تا (س) > ها (س)) .

هذه المجموعة تسمى **مجموعة حلول** المتراجحة

تا (س) $\geqslant$ ها (س) (أو تا (س) > ها (س))

مثال 1 :

تا وَ ها دالتان للمجموعة ح في ح حيث :

تا (س) = س^2 ؛ ها (س) = س .

الأعداد (-1) ، 0 ، 1 ليست حلولاً للمتراجحة تا (س) > ها (س)
لأن المتباينات التالية غير محققة :
تا(-1) > ها(-1) ؛ تا(0) > ها(0) ؛ تا(1) > ها(1) .

بينما الأعداد $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي حلول لهذه المتراجحة لأن المتباينات التالية محققة .

تا $\left(\frac{1}{2}\right)$ > ها $\left(\frac{1}{2}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{1}{4}\right)$ > ها $\left(\frac{1}{4}\right)$ ؛

تا $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ > ها $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

مثال 2 :

تا و ها دالتان للمجموعة ح في نفسها حيث
تا (س) = $-$ س + 2 ؛ ها (س) = س $-$ 4
لنبحث عن ي مجموعة حلول المترجحة تا (س) ⩽ ها (س) .

أولاً : إذا كان α عنصراً من ي فإنه يحقق المتباينة التالية :
$-\alpha + 2 \leqslant \alpha - 4$ أي $6 \leqslant 2\alpha$ وهذا يعني أن $3 \leqslant \alpha$
إذن $\alpha \in]-\infty , 3[$
ومنه ي ⊃ $]-\infty , 3[$ (1)

ثانياً : إذا كان α عنصراً من المجال $]-\infty , 3[$ فإنه يحقق المتباينة
$3 \leqslant \alpha$ أي $6 \leqslant 2\alpha$
من المتباينة السابقة نستنتج :
$6 - (\alpha + 4) \leqslant 2\alpha - (\alpha + 4)$

أي : $-\alpha + 2 \leqslant -\alpha - 4$

أي : تا (α) $\leqslant$ ها (α)

إذن إذا كان α عنصراً من المجال] $-\infty$ ، 3 [فإنه حل للمتراجحة تا (س) $\leqslant$ ها (س)

أي : $\alpha \in$ ي

وَمنه] $-\infty$ ، 3 [$\subset$ ي (2)

من (1) وَ (2) نستنتج : ي =] $-\infty$ ، 3 [

3.1 ـ المعادلات المتكافئة . المتراجحات المتكافئة :

التعريف

تكون معادلتان (أو متراجحتان) معرفتان على نفس المجموعة متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

• إذا كانت ($م_1$) وَ ($م_2$) معادلتين (أو متراجحتين) متكافئتين نكتب :

($م_1$) $\Leftrightarrow$ ($م_2$)

• **مثلاً** :

المعادلتان $س^2$ = س وَ س (س − 1) = 0 متكافئتان .

إذا كانت ($م_1$) معادلة (أو متراجحة) فإنه يمكن إيجاد معادلة (أو متراجحة) ($م_2$) مكافئة لها سهلة الحل وذلك باستعمال القواعد التالية :

القاعدة 1

إذا كانت تا ، ها وَ عا ثلاث دوال معرفة على نفس المجموعة فإن :

• تا (س) = ها (س) $\Leftrightarrow$ تا (س) + عا (س) = ها (س) + عا (س)

• تا (س) $\leqslant$ ها (س) $\Leftrightarrow$ تا (س) + عا (س) $\leqslant$ ها (س) + عا (س)

بالخصوص إذا كان عا (س) = − ها (س) فإن :

- تا (س) = ها (س) ⟺ تا (س) − ها (س) = 0
- تا (س) ≤ ها (س) ⟺ تا (س) − ها (س) ≤ 0

مثلاً :

المعادلة 2 س^2 + 1 = س^2 − 2 س + 1 (م) مكافئة

للمعادلة 2 س^2 + 1 − س^2 + 2 س − 1 = 0

أي س^2 + 2 س = 0

إذن (م) ⟺ س^2 + 2 س = 0

القاعدة 2

> إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :
>
> تا (س) = ها (س) ⟺ λ تا (س) = λ ها (س)

مثلا :

المعادلة 2 س^2 − 4 س + 2 = 0 في ح مكافئة

للمعادلة $\frac{1}{2}$ (2 س^2 − 4 س + 2) = 0

أي : س^2 − 2 س + 1 = 0

أي (س − 1)^2 = 0

إذن 2 س^2 − 4 س + 2 = 0 ⟺ (س − 1)^2 = 0

القاعدة 3

> إذا كانت تا وَ ها دالتين معرفتين على نفس المجموعة وكان λ عدداً حقيقياً غير معدوم فإن :
>
> - تا (س) ≤ ها (س) ⟺ λ تا (س) ≤ λ ها (س) إذا كان λ موجباً
> - تا (س) ≤ ها (س) ⟺ λ تا (س) ≥ λ ها (س) إذا كان λ سالباً

مثلا :

المتراجحة $\frac{س}{3} + 3 \geqslant 2$ س $+ \frac{1}{2}$ في ح مكافئة

للمتراجحة 2 س + 18 ⩾ 12 س + 3

(بضرب طرفي المتراجحة في العدد 6)

أي : -10 س $+ 15 \geqslant 0$

بالقسمة على (-5) نحصل على 2 س $- 3 \leqslant 0$

إذن :

$$\frac{س}{3} + 3 \geqslant 2 س + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 س - 3 \leqslant 0$$

2 ـ المعادلات من الشكل أ س + ب = 0

1.2 ـ المعادلات من الدرجة الأولى :

التعريف :

نسمي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهول س
كل معادلة من الشكل أ س + ب = 0 حيث أ و ب عددان حيقيان
معلومان وَ أ $\neq 0$.

بما أن أ $\neq 0$ فإن : أ س + ب = 0 $\Leftrightarrow$ س $= -\frac{ب}{أ}$

إذن :

كل معادلة من الدرجة الأولى أ س + ب = 0

تقبل ، في ح . **حلا وحيداً** هو $\left(-\frac{ب}{أ} \right)$

2.2 ـ المعادلات من الشكل $أ$ س + $ب$ = 0

لقد رأينا فيما سبق أن كل معادلة من الشكل $أ$ س + $ب$ = 0

تقبل حلاً وحيداً إذا كان $أ \neq 0$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $أ = 0$.

لما $أ = 0$ المعادلة $أ$ س + $ب$ = 0 تكتب 0 س + $ب$ = 0

أي 0 س = − $ب$

الطرف الأول لهذه المعادلة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي س .

أما الطرف الثاني (− $ب$) فهو معطى :

- إذا كان $ب = 0$ فإن كل عدد حقيقي س يحقق المساواة
0 س = − $ب$ فهو إذاً حل للمعادلة 0 س = − $ب$
- إذا كان $ب \neq 0$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المساواة
0 س = − $ب$

وبالتالي المعادلة 0 س = − $ب$ ليس لها حل في ح .

الخلاصة :

لتكن ، في ح ، المعادلة $أ$ س + $ب$ = 0 ولتكن ي مجموعة حلولها . • إذا كان $أ \neq 0$ فإن ي = $\{-\frac{ب}{أ}\}$ • إذا كان $أ = 0$ وَ $ب = 0$ فإن ي = ح • إذا كان $أ = 0$ وَ $ب \neq 0$ فإن ي = ϕ

مثال 1 :

نعتبر ، في ح ، المعادلة $\frac{س}{3} + 3 = 2$ س $+ \frac{1}{2}$ (1)

لدينا :

$$\frac{س}{3} + 3 = 2س + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2س + 18 = 12س + 3$$

$$\Leftrightarrow 15 = 10س$$

$$\Leftrightarrow س = \frac{3}{2}$$

إذن المعادلة (1) تقبل ، في ح ، حلا وحيداً هو $\frac{3}{2}$

وَمجموعة حلولها هي $\{\frac{3}{2}\}$

مثال 2 : نعتبر ، في ح ، المعادلة :

$$3(3س + 4) - 2س = 5(س - 1) + 2(س + 1) \qquad (2)$$

لدينا : $(2) \Leftrightarrow 9س + 12 - 2س = 5س - 5 + 2س + 2$

$$\Leftrightarrow 7س + 12 = 7س - 3$$

$$\Leftrightarrow 0س = -15$$

المعادلة (2) ليس لها حل

وَ مجموعة حلولها هي ϕ .

مثال 3 : نعتبر ، في ح ، المعادلة :

$$\frac{2س - 5}{3} = \frac{4س - 2}{6} - \frac{4}{3} \qquad (3)$$

لدينا : $(3) \Leftrightarrow 2(2س - 5) = 4س - 2 - 8$

$$\Leftrightarrow 4س - 10 = 4س - 10$$

$$\Leftrightarrow 0س = 0$$

إذن كل عدد حقيقي هو حل للمعادلة (3)

وَ مجموعة حلولها هي ح .

3 ـ المتراجحات من الشكل أ س + ب ⩽ 0

1.3 ـ المتراجحات من الدرجة الأولى :

التعريف : نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهول س كل متراجحة من الشكل أ س + ب ⩽ 0

(أو أ س + ب < 0 أو أ س + ب ⩾ 0 أو أ س + ب > 0)

حيث أ وَ ب عددان حقيقيان معلومان و أ ≠ 0

حل المتراجحة من الدرجة الأولى أ س + ب ⩽ 0

لدينا : أ س + ب ⩽ 0 ⟸⟹ أ س ⩽ − ب (1)

بما أن أ ≠ 0 فإنه يمكن ضرب طرفي المتراجحة (1) في العدد $\frac{1}{أ}$ فنحصل على :

س ⩽ $-\frac{ب}{أ}$ إذا كان أ موجباً .

أو س ⩾ $-\frac{ب}{أ}$ إذا كان أ سالباً .

إذن :

- إذا كان أ > 0 فإن مجموعة حلول المتراجحة أ س + ب ⩽ 0 هي المجال] −∞ ، $-\frac{ب}{أ}$]
- إذا كان أ < 0 فإن مجموعة حلول المتراجحة أ س + ب ⩽ 0 هي المجال [$-\frac{ب}{أ}$ ، +∞ [

مثال 1 : نعتبر ، في ح ، المتراجحة

4 س + 7 ⩽ 5 س + 2 − (3 س + 5) (1)

لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow 4\text{س} + 7 \geq 5\text{س} + 2 - 3\text{س} - 5$$

$$\Leftrightarrow 4\text{س} + 7 \geq 2\text{س} - 3$$

$$\Leftrightarrow 2\text{س} \geq -10$$

$$\Leftrightarrow \text{س} \geq -5$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال $[-5 \text{ ، } +\infty[$

مثال 2 : نعتبر ، في ح ، المتراجحة :

$$\bullet \quad \frac{2\text{س} - 1}{3} - \frac{\text{س} + 1}{6} < \frac{2\text{س} + 5}{2} \qquad (2)$$

لدينا : $(2) \Leftrightarrow 2(2\text{س} - 1) - (\text{س} + 1) < 3(2\text{س} + 5)$

$$\Leftrightarrow 4\text{س} - 2 - \text{س} - 1 < 6\text{س} + 15$$

$$\Leftrightarrow -3\text{س} < 18$$

$$\Leftrightarrow \text{س} > -6$$

إذن مجموعة حلول المتراجحة (2) هي المجال $]-6 \text{ ، } +\infty[$

2.3 ـ المتراجحات من الشكل $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} \leq 0$

لقد تعرّفنا فيما سبق على حلول المتراجحة $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} \leq 0$ لما $\text{أ} \neq 0$.

لندرس الآن الحالة التي يكون فيها $\text{أ} = 0$.

في هذه الحالة المتراجحة $\text{أ}\,\text{س} + \text{ب} \leq 0$ تكتب :

$$0\text{س} + \text{ب} \leq 0 \quad \text{أي} \quad 0\text{س} \leq -\text{ب}$$

الطرف الأول لهذه المتراجحة يساوي الصفر مهما يكن العدد الحقيقي س .

أما الطرف الثاني $(-\text{ب})$ فهو معطى :

- إذا كان $\text{ب} < 0$ فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المتباينة $0\text{س} > -\text{ب}$ وَ بالتالي

المتراجحة 0 س $\geqslant$ − ب ليس لها أي حل في ح .

- إذا كان ب $\geqslant 0$ فإن كل عدد حقيقي س يحقق المتباينة 0 س $\geqslant$ − ب فهو إذاً حل للمتراجحة 0 س $\geqslant$ − ب

الخلاصة :

لتكن ، في ح ، المتراجحة ا س + ب $\geqslant 0$
ولتكن ي مجموعة حلولها .

- إذا كان ا > 0 فإن ي $=]-\infty ، -\frac{ب}{ا}]$
- إذا كان ا < 0 فإن ي $= [-\frac{ب}{ا} ، +\infty[$
- إذا كان ا $= 0$ وَ ب $\geqslant 0$ فإن ي = ح
- إذا كان ا $= 0$ وَ ب < 0 فإن ي $= \phi$

5 ـ تمارين محلولة :

التمرين الأول :

حل ، في ح ، المعادلة ذات المجهول س

$$\frac{س + 3}{س - 2} = \frac{5}{(3 - س)(س - 2)} \quad (1)$$

تكون المعادلة (1) معرفة إذا وفقط إذا كان :

س − 2 $\neq 0$ وَ (3 − س)(س − 2) $\neq 0$

أي س $\neq 2$ وَ س $\neq 3$

وَ بالتالي تكون مجموعة التعريف ف لهذه المعادلة

ف = ح − { 2 ، 3 }

مهما يكن س ∈ ف لدينا :

$$(1) \iff \frac{\text{س}+3}{\text{س}-2} - \frac{5}{(3-\text{س})(\text{س}-2)} = 0$$

$$\iff \frac{(\text{س}+3)(3-\text{س})-5}{(3-\text{س})(\text{س}-2)} = 0$$

$$\iff (\text{س}+3)(3-\text{س})-5 = 0$$

$$\iff \text{س}^2 - 4 = 0$$

$$\iff (\text{س}+2)(\text{س}-2) = 0$$

$$\iff \text{س} = -2 \quad \text{أو} \quad \text{س} = 2$$

$$\iff \text{س} = -2 \quad (\text{لأن } 2 \notin \text{ف})$$

إذن :

مجموعة الحلول للمعادلة (1) هي $\text{ي} = \{-2\}$

التمرين الثاني :

حل ، في ح ، المعادلة ذات المجهول س : $3\,|\text{س}+2| - |\text{س}+1| = 4 \quad (2)$

لنضع $\text{ك}(\text{س}) = 3\,|\text{س}+2| - |\text{س}+1|$
ولنكتب ك (س) بدون استعمال رمز القيمة المطلقة
لدينا :

$|\text{س}+2| = \text{س}+2$ إذا كان $\text{س} \geqslant -2$
وَ
$|\text{س}+2| = -\text{س}-2$ إذا كان $\text{س} \leqslant -2$

$|\text{س}+1| = \text{س}+1$ إذا كان $\text{س} \geqslant -1$
وَ
$|\text{س}+1| = -\text{س}-1$ إذا كان $\text{س} \leqslant -1$

الجدول التالي يبيّن كتابة ك (س) حسب قيم س .

س	$-\infty$ … -2	-2 … -1	-1 … $+\infty$
|3س+2|	−3س−6	3س+6	3س+6
|س+1|	−س−1	−س−1	س+1
ك (س)	−2س−5	4س+7	2س+5

• في المجال]−∞ ، −2] لدينا :

(2) ⟸⟹ −2 س − 5 = 4

⟸⟹ س = $-\frac{9}{2}$

العدد $\left(-\frac{9}{2}\right)$ هو حل للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{9}{2}\right)$

ينتمي إلى المجال]−∞ ، −2]

• في المجال [−2 ، −1] لدينا :

(2) ⟸⟹ 4 س + 7 = 4

⟸⟹ س = $-\frac{3}{4}$

العدد $\left(-\frac{3}{4}\right)$ ليس حلاّ للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{3}{4}\right)$

لا ينتمي إلى المجال [−2 ، −1]

• في المجال [−1 ، +∞[لدينا :

(2) ⟸⟹ 2 س + 5 = 4

⟸⟹ س = $-\frac{1}{2}$

العدد $\left(-\frac{1}{2}\right)$ حل للمعادلة (2) لأن $\left(-\frac{1}{2}\right)$ ينتمي إلى المجال $]-1 ، +\infty[$

• إذن مجموعة حلول المعادلة (2) هي : $\left\{-\frac{9}{2} ، -\frac{1}{2}\right\}$

التمرين الثالث :

حل ، في ح ، المعادلة ط (ط س − 3) = س + 3 (3) حيث س هو المجهول وَ ط عدد حقيقي معلوم نسميه **وسيطاً** .

لدينا : (3) ⟸⟹ ط² س − 3 ط = س + 3

⟸⟹ ط² س − س = 3 ط + 3

⟸⟹ (ط² − 1) س = 3 (ط + 1) (′3)

المناقشة :

• إذا كان ط² − 1 = 0 أي ط = 1 أو ط = − 1 فإن المعادلة (′3) ليست من الدرجة الأولى :

ـ إذا كان ط = 1 فإن (′3) تكتب 0 س = 6
وَ مجموعة حلولها هي ϕ

ـ إذا كان ط = − 1 فإن (′3) تكتب 0 س = 0
وَ مجموعة حلولها هي ح

• إذا كان ط² − 1 ≠ 0 أي ط ≠ 1 وَ ط ≠ − 1

فإن المعادلة (′3) من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو :

$\frac{3(ط+1)}{ط^2-1}$ أي $\frac{3}{ط-1}$

التمرين الرابع :

حل ، في $\mathbb{R}$ ، الجملة :

(جـ) $\begin{cases} 1 - 3\text{س} \leqslant \frac{1}{2}\text{س} - 3 & \text{(أ)} \\ \text{وَ} \\ \frac{1}{2}\text{س} - 3 < 2\text{س} + 5 & \text{(ب)} \end{cases}$

لتكن $ي_1$ وَ $ي_2$ مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) وَ (ب) على الترتيب .

مجموعة حلول الجملة (جـ) هي المجموعة $ي_1 \cap ي_2$.

- **لنعيّن المجموعة $ي_1$**

لدينا : (أ) $\Longleftrightarrow 1 + 3 \leqslant 3\text{س} + \frac{1}{2}\text{س}$

$$\Longleftrightarrow 4 \leqslant \frac{7}{2}\text{س}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{8}{7} \leqslant \text{س}$$

ومنه $ي_1 = \left] \frac{8}{7} ، +\infty \right[$

- **لنعيّن المجموعة $ي_2$**

لدينا : (ب) $\Longleftrightarrow -3 - 5 < 2\text{س} - \frac{1}{2}\text{س}$

$$\Longleftrightarrow -8 < \frac{3}{2}\text{س}$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{16}{3} < \text{س}$$

ومنه ي$_2$ = [$-\frac{16}{3}$ ، $+\infty$ [

إذن ي$_1$ ∩ ي$_2$ =] $\frac{8}{7}$ ، $+\infty$ [

ي$_2$ $-\frac{16}{3}$

$-\frac{16}{3}$ $\frac{8}{7}$

ي$_1$ ∩ ي$_2$

التمرين الخامس :

> حل ، في ح ، المتراجحة :
>
> (2 − ط) س < 3 (ط + 1)   (م)
>
> حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي .

• إذا كان 2 − ط = 0 أي ط = 2 فإن المتراجحة (م) تكتب 0 س < 9 وَمجموعة حلولها هي المجموعة ح

• إذا كان 2 − ط > 0 أي ط < 2 فإن :

(2 − ط) س < 3 (ط + 1) ⟺ س < $\frac{3(\text{ط}+1)}{2-\text{ط}}$

وَمجموعة حلول (م) هي المجال] $-\infty$ ، $\frac{3(\text{ط}+1)}{2-\text{ط}}$ [

• إذا كان 2 − ط < 0 أي ط > 2 فإن :

(2 − ط) س < 3 (ط + 1) ⟺ س > $\frac{3(\text{ط}+1)}{2-\text{ط}}$

وَمجموعة حلول (م) هي المجال :] $\frac{3(\text{ط}+1)}{2-\text{ط}}$. x + [

22 المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية

1 ـ المعادلات من الدرجة الثانية

1.1 ـ التعريف

نسمي معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول الحقيقي س
كل معادلة من الشكل $ا س^2 + ب س + حـ = 0$
حيث ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية معلومة وَ $ا \neq 0$

2.1 ـ حل معادلات بسيطة من الدرجة الثانية

1) حل المعادلة : $3 س^2 + 5 س = 0$ في المجموعة ح

لدينا : $3 س^2 + 5 س = 0 \Leftrightarrow س (3 س + 5) = 0$

$\Leftrightarrow س = 0$ أو $س = -\frac{5}{3}$

إذن :

0 وَ $\left(-\frac{5}{3}\right)$ هما حلاَ المعادلة $3 س^2 + 5 س = 0$

2) حل ، في ح ، المعادلة : $(س - 2)^2 = 9$

لدينا : $(س - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow (س - 2)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (س - 2 - 3) (س - 2 + 3) = 0$

$\Leftrightarrow (س - 5) (س + 1) = 0$

$\Leftrightarrow س = 5$ أو $س = -1$

إذن :

5 وَ (-1) هما حلا المعادلة $(س - 2)^2 = 9$

3) حل ، في ح ، المعادلة : $س^2 + 6 س - 7 = 0$

لدينا : $س^2 + 6 س = س^2 + 2.3 س + (3)^2 - (3)^2$

$= (س + 3)^2 - 9$

ومنه : $س^2 + 6س - 7 = (س + 3)^2 - 9 - 7$

$= (س + 3)^2 - 16$

$= (س + 3 - 4)(س + 3 + 4)$

$= (س - 1)(س + 7)$

إذن : $س^2 + 6س - 7 = 0 \Leftrightarrow (س - 1)(س + 7) = 0$

$\Leftrightarrow س = 1$ أو $س = -7$

1 وَ (-7) هما حلا المعادلة $س^2 + 6س - 7 = 0$

4) حلِ ، في ح ، المعادلة $س^2 - س + 1 = 0$

لدينا : $س^2 - س = س^2 - 2 \times \frac{1}{2} س + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

ومنه $س^2 - س + 1 = \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

نلاحظ أنه : $\forall س \in ح \quad \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

وبالتالي : $\forall س \in ح \quad \left(س - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

إذن المعادلة $س^2 - س + 1 = 0$ لا تقبل أي حل .

5) حل ، في ح ، المعادلة $2\text{س}^2 - 5\text{س} + 3 = 0$ (1)

لدينا : $2\text{س}^2 - 5\text{س} + 3 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2} = 0$$

بما أن :

$$\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} = \text{س}^2 - 2 \times \frac{5}{4}\text{س} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$= \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}$$

نحصل على :

$$\text{س}^2 - \frac{5}{2}\text{س} + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} - \frac{3}{2}\right)\left(\text{س} - 1\right) = 0$$

إذن : $\frac{3}{2}$ وَ 1 هما حلا المعادلة $2\text{س}^2 - 5\text{س} + 3 = 0$

3.1 ـ الشكل النموذجي لكثير الحدود من الدرجة الثانية

ليكن $\text{ا}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{حـ}$ كثير حدود من الدرجة الثانية .

بما أن $\text{ا} \neq 0$ فإن :

$$\text{ا}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{حـ} = \text{ا}\left[\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\text{س} + \frac{\text{حـ}}{\text{ا}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\text{س}^2 + 2 \, . \, \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\text{س} + \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \left(\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 + \frac{\text{ح}}{\text{أ}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2}{4\text{أ}^2} + \frac{\text{ح}}{\text{أ}}\right]$$

$$= \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ح}}{4\text{أ}^2}\right]$$

إذن :

> يمكن كتابة كثير الحدود من الدرجة الثانية $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{ح}$ على الشكل
>
> $$\text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ح}}{4\text{أ}^2}\right]$$ الذي
>
> يسمى **شكله النموذجي .**

4.1 ـ حل معادلة من الدرجة الثانية

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية $\text{أ}\text{س}^2 + \text{ب}\text{س} + \text{ح} = 0$ (1)

لدينا :

$$(1) \Leftrightarrow \text{أ}\left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ح}}{4\text{أ}^2}\right] = 0$$

(باستعمال الشكل النموذجي)

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ح}}{4\text{أ}^2} = 0 \quad (\text{لأن } \text{أ} \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{ح}}{4\text{أ}^2} \quad (2)$$

نلاحظ أن الطرف الأول لهذه المعادلة مربع فهو إذا موجب .
أما الطرف الثاني فهو كسر مقامه موجب تماماً وَإشارته إذاً هي إشارة بسطه الذي يسمى **مميز المعادلة** وَ يرمز إليه بالرمز Δ

$$\boxed{\Delta = ب^2 - 4 أ ح}$$

إذن :
لحل المعادلة (1) نميز ثلاث حالات حسب إشارة Δ

الحالة الأولى $\Delta < 0$

المعادلة (2) تكتب : $\left(س + \frac{ب}{2أ} \right)^2 = \frac{\Delta}{4أ^2}$ (3)

بما أن $\frac{\Delta}{4أ^2} < 0$ و $\left[\forall س \in ح \quad \left(س + \frac{ب}{2أ} \right)^2 \geqslant 0 \right]$

فإنه لا يوجد أي عدد حقيقي س يحقق المعادلة (3)
إذن : في هذه الحالة ليس للمعادلة (1) أي حل .

الحالة الثانية $\Delta = 0$

المعادلة (2) تكتب : $\left(س + \frac{ب}{2أ} \right)^2 = 0$

أي $\left(س + \frac{ب}{2أ} \right) \left(س + \frac{ب}{2أ} \right) = 0$

إذن المعادلة المعطاة لها حلان يساويان $\left(-\frac{ب}{2أ} \right)$

العدد $\left(-\frac{ب}{2أ} \right)$ يدعى **حلاً مضاعفا** لهذه المعادلة

الحالة الثالثة $\Delta > 0$

يمكن كتابة Δ على الشكل $\left(\sqrt{\Delta}\right)^2$ وَالمعادلة (2) تصبح مكافئة للمعادلة التالية :

$$\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)^2=0$$

أي :

$$\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)\left(\text{س}+\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)=0$$

وبالتالي :

$$\left(\text{س}-\frac{-\text{ب}-\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)\left(\text{س}-\frac{-\text{ب}+\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)=0$$

إذن : في هذه الحالة المعادلة المعطاة لها حلان متمايزان هما :

$$\text{س}'=\frac{-\text{ب}-\sqrt{\text{ب}^2-4\text{أ}\text{ح}}}{2\text{أ}} \quad \text{وَ} \quad \text{س}''=\frac{-\text{ب}+\sqrt{\text{ب}^2-4\text{أ}\text{ح}}}{2\text{أ}}$$

الخلاصة

لتكن ، في $\mathbb{R}$ ، المعادلة من الدرجة الثانية :

$$\text{أ}\text{س}^2+\text{ب}\text{س}+\text{ح}=0 \qquad (1)$$

وليكن Δ مميزها $(\Delta=\text{ب}^2-4\text{أ}\text{ح})$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة (1) لا تقبل أي حل .
- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلاًّ مضاعفاً هو $\left(-\frac{\text{ب}}{2\text{أ}}\right)$
- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلّين متمايزين هما :

$$\text{س}'=\frac{-\text{ب}-\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}} \quad \text{وَ} \quad \text{س}''=\frac{-\text{ب}+\sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$$

ملاحظات :

1) من الدراسة السابقة نستنتج أنه إذا كان للمعادلة من الدرجة الثانية

$ا س^2 + ب س + حـ = 0$

حلان س′ ، س″ فإنه يمكن كتابتها على الشكل:

$ا (س - س′)(س - س″) = 0$

2) إذا كان العددان الحقيقيان ا ، حـ من إشارتين مختلفتين فإنه يكون

ا حـ < 0 ومنه $ب^2 - 4 ا حـ > 0$

وَبالتالي المعادلة $ا س^2 + ب س + حـ = 0$ تقبل حلين متمايزين .

3) إذا كان ب = 2 ب′ فإنه يمكن أن نكتب:

$\Delta = (2 ب′)^2 - 4 ا حـ$ أي $\Delta = 4 [ب′^2 - ا حـ]$

إشارة Δ هي إذاً نفس إشارة العدد ($ب′^2 - ا حـ$) الذي يدعى **المميز المختصر** ويرمز اليه بالرمز $\Delta′$.

إذا كان ب = 2 ب′ وكان $\Delta′ > 0$ فإن عبارتي الحلّين س′ و س″ تصبحان :

$$س′ = \frac{- ب′ - \sqrt{\Delta′}}{ا} \quad و \quad س″ = \frac{- ب′ + \sqrt{\Delta′}}{ا}$$

5.1 ـ أمثلة :

مثال 1 : حل ، في ح ، المعادلة : $- 2 س^2 + 3 س + 5 = 0$ (1)

المعادلة (1) من الشكل $ا س^2 + ب س + حـ = 0$

ا = − 2 ؛ ب = 3 ؛ حـ = 5

لدينا : $\Delta = ب^2 - 4 ا حـ$

$\Delta = 3^2 - 4 (- 2) (5) = 49$

بما أن $\Delta > 0$ فالمعادلة (1) تقبل ، في ح ، حلين متمايزين هما :

$\text{س}' = \dfrac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$ أي : $\text{س}' = \dfrac{-3-7}{2(-2)} = \dfrac{-10}{-4} = \dfrac{5}{2}$

وَ

$\text{س}'' = \dfrac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}$ أي $\text{س}'' = \dfrac{-3+7}{2(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$

مثال 2 : حلّ ، في ح ، المعادلة : $\text{س}^2 - 2\sqrt{3}\,\text{س} + 3 = 0$ (2)

المعادلة (2) من الشكل $\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$

$\text{أ} = +1$ ؛ $\text{ب} = -2\sqrt{3}$ ؛ $\text{حـ} = 3$

لدينا : $\Delta = \text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{حـ}$

$= (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(3) = 0$

بما أن $\Delta = 0$ فالمعادلة (2) تقبل ، في ح ، حلاً مضاعفاً

هو $\text{س}' = \text{س}'' = \dfrac{-\text{ب}}{2\text{أ}}$

أي $\text{س}' = \text{س}'' = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

مثال 3 : حل ؛ في ح ؛ المعادلة : $-2\,\text{س}^2 + 6\,\text{س} - 5 = 0$ (3)

المعادلة (3) من الشكل $\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$

$\text{أ} = -2$ ؛ $\text{ب} = 6$ ؛ $\text{حـ} = -5$

لدينا : $\Delta = \text{ب}^2 - 4\,\text{أ}\,\text{حـ}$

$= 6^2 - 4(-2)(-5)$

$= -4$

بما أن $\Delta < 0$ فالمعادلة (3) لا تقبل حلا .

مثال 4 : حل ، في ح ، المعادلة : 3 س^2 + 26 س + $16 = 0$ (4)

المعادلة (4) من الشكل ا س^2 + ب س + حـ $= 0$

ا $= 3$ ؛ ب $= 26$ ؛ حـ $= 16$

لنحسب المميز المختصر Δ'

$\Delta' =$ ب$'^2$ − ا حـ

$\Delta' = (13)^2 - 3(16) = 121$

بما أن $\Delta' > 0$ فإن المعادلة (4) تقبل حلّين هما :

س$' = \dfrac{-\text{ب}' - \sqrt{\Delta'}}{\text{ا}}$ و س$'' = \dfrac{-\text{ب}' + \sqrt{\Delta'}}{\text{ا}}$

أي :

س$' = \dfrac{-13 - \sqrt{121}}{3}$ و س$'' = \dfrac{-13 + \sqrt{121}}{3}$

أي : س$' = -8$ و س$'' = -\dfrac{2}{3}$

ملاحظة : لحل المعادلة (4) يمكن استعمال المميز Δ

فنجد $\Delta = 484$ والحسابات تكون أكثر صعوبة

مثال 5 : حل ، في ح ، المعادلة :

(ط − 1) س^2 + 2 (ط + 1) س + ط $= 0$ (5)

حيث س هو المجهول و ط **وسيط حقيقي** .

1 • إذا كان ط − 1 $= 0$ أي ط $= 1$ فإن المعادلة (5)

نكتب 4 س + 1 $= 0$

فهي إذاً معادلة من الدرجة الأولى ولها حل وحيد هو $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

2 • إذا كان ط − 1 ≠ 0 أي ط ≠ 1 فإن المعادلة (5) تصبح معادلة من الدرجة الثانية وهي من الشكل

$ا س^2 + ب س + حـ = 0$:

ا = ط − 1 ؛ ب = 2 (ط + 1) ؛ حـ = ط

لنحسب المميز المختصر Δ' :

$\Delta' = (ط + 1)^2 - (ط - 1) (ط)$

$= 3 ط + 1$

ـ إذا كان 3 ط + 1 < 0 أي ط < $-\frac{1}{3}$ فإن المعادلة (5) لا تقبل حلاً .

ـ إذا كان 3 ط + 1 = 0 أي ط = $-\frac{1}{3}$ فإن المعادلة (5) تقبل حلاً مضاعفاً

هو $\left(-\frac{2 (ط + 1)}{2 (ط - 1)} \right)$ أي $\left(\frac{1}{2} \right)$

ـ إذا كان 3 ط + 1 > 0

أي ط ∋ $\left] -\frac{1}{3} ، 1 \right[\cup \left] 1 ، +\infty \right[$

فإن المعادلة (5) تقبل حلّين متمايزين هما :

$س' = \frac{-(ط + 1) - \sqrt{3 ط + 1}}{ط - 1}$

$س'' = \frac{-(ط + 1) + \sqrt{3 ط + 1}}{ط - 1}$

2 ـ المتراجحات من الدرجة الثانية

1.2 ـ إشارة كثير الحدود من الدرجة الثانية

ليكن تا (س) كثير حدود من الدرجة الثانية

تا (س) = أ س^2 + ب س + حـ (أ $\neq 0$)

لقد رأينا فيما سبق أن :

$$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = \text{أ} \left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} \right)^2 - \frac{\text{ب}^2 - 4\text{أ حـ}}{4\text{أ}^2} \right]$$

أي

$$\text{تا (س)} = \text{أ} \left[\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\text{أ}^2} \right]$$

لدينا ثلاث حالات حسب إشارة Δ .

الحالة الأولى $\Delta < 0$

بما أن : $\forall$ س $\in$ ح $\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} \right)^2 \geqslant 0$ و $- \frac{\Delta}{4\text{أ}^2} > 0$

فإنه $\forall$ س $\in$ ح $\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} \right)^2 - \frac{\Delta}{4\text{أ}^2} > 0$

وَبالتالي تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة أ وهذا مهما يكن العدد الحقيقي س .

الحالة الثانية $\Delta = 0$

في هذه الحالة يكون تا (س) = أ $\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\text{أ}} \right)^2$

ينعدم تا (س) من أجل س = $- \frac{\text{ب}}{2\text{أ}}$

وإشارة تا (س) هي إشارة ا من أجل كل عدد حقيقي س يختلف عن $\left(-\frac{\text{ب}}{2\text{ا}} \right)$.

الحالة الثالثة $\Delta > 0$

في هذه الحالة يكون

$$\text{تا}(\text{س}) = \text{ا} \left[\text{س} - \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}} \right] \left[\text{س} - \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}} \right]$$

أي $\text{تا}(\text{س}) = \text{ا}(\text{س} - \text{س}')(\text{س} - \text{س}'')$

بوضع $\text{س}' = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}}$ و $\text{س}'' = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}}$

ينعدم تا (س) من أجل $\text{س} = \text{س}'$ أو $\text{س} = \text{س}''$

وإشارة تا (س) هي إشارة الجداء $\text{ا}(\text{س} - \text{س}')(\text{س} - \text{س}'')$

مهما يكن س يختلف عن $\text{س}'$ و $\text{س}''$.

يبيّن الجدول التالي إشارة تا (س) (بفرض $\text{س}' < \text{س}''$)

س	$-\infty$		$\text{س}'$		$\text{س}''$		$+\infty$
إشارة $(\text{س}-\text{س}')$		−	0	+		+	
إشارة $(\text{س}-\text{س}'')$		−		−	0	+	
إشارة $(\text{س}-\text{س}')(\text{س}-\text{س}'')$		+	0	−	0	+	
إشارة تا (س)		إشارة ا		إشارة (−ا)		إشارة ا	

الخلاصة

ليكن تا (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية :

تا (س) = أ س^2 + ب س + حـ

وليكن Δ مميزه (Δ = ب^2 − 4 أ حـ)

- إذا كان Δ < 0 فإن تا (س) لا ينعدم وإشارته هي إشارة أ وهذا مهما يكن العدد الحقيقي س .
- إذا كان Δ = 0 فإن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$

  وإشارته هي إشارة أ وهذا مهما يكن س يختلف عن $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$
- إذا كان Δ > 0 فإن تا (س) يقبل جذرين متمايزين س′ و س″ (س′ < س″) وإشارة تا (س) هي :

إشارة أ إذا وفقط إذا كان س ∋] − ∞ ، س′] ∪ [س″ ، + ∞ [

إشارة (− أ) إذا وفقط إذا كان س ∋] س′ ، س″ [

Δ < 0 : إشارة أ

Δ = 0 : س′ = س″ ؛ إشارة أ | إشارة أ

Δ > 0 : س′ ، س″ ؛ إشارة أ | إشارة (− أ) | إشارة أ

2.2 ـ حل متراجحة من الدرجة الثانية

نسمي متراجحة من الدرجة الثانية كل متراجحة من الشكل

ا س^2 + ب س + حـ $\geqslant 0$ (أو ا س^2 + ب س + حـ < 0

أو ا س^2 + ب س + حـ $\leqslant 0$ أو ا س^2 + ب س + حـ > 0)

حيث ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية وَ ا $\neq 0$

يؤول حل المتراجحة من الدرجة الثانية ا س^2 + ب س + حـ $\geqslant 0$ (1)

إلى دراسة إشارة كثير الحدود (ا س^2 + ب س + حـ) .

وتعيين مجموعة قيم س التي تحقق (1)

مثال 1 : حل ، في ح ، المتراجحة :
2 س^2 − 3 س + 1 < 0 (1)

المتراجحة (1) هي متراجحة من الدرجة الثانية .

لندرس إشارة كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)

لدينا : $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$

إذن كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1) يقبل جذرين متمايزين هما :

س$'$ $= \frac{+3-1}{4} = \frac{1}{2}$ وَ س$''$ $= \frac{+3+1}{4} = 1$

بما أن معامل س^2 موجب فإن كثير الحدود (2 س^2 − 3 س + 1)

يكون سالباً تماما إذا وفقط إذا كان س $\in]\frac{1}{2}$ ، $1[$.

إذن : مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجال : $]\frac{1}{2}$ ، $1[$

مثال 2 : حل ، في ح ، المتراجحة :

2 س^2 − س + 1 ⩾ 0 (2)

المتراجحة (2) من الدرجة الثانية .

لدينا : $\Delta = (-1)^2 - 4(+2)(+1) = -7$

بما أن Δ سالب تماماً ومعامل س^2 موجب فإن كثير الحدود

(2 س^2 − س + 1) موجب تماماً مهما يكن العدد الحقيقي س .

إذن :

مجموعة حلول المتراجحة 2 س^2 − س + 1 ⩾ 0 هي المجموعة ح

مثال 3 : حل ، في ح ، المتراجحة :

− 4 س^2 + 2 س − 1 ⩾ 0 (3)

المتراجحة (3) من الدرجة الثانية

لندرس إشارة كثير الحدود (− 4 س^2 + 2 س − 1)

لدينا : $\Delta' = (1)^2 - (-4)(-1) = -3$

بما أن Δ' سالب ومعامل س^2 سالب فإن كثير الحدود

(− 4 س^2 + 2 س − 1) سالب تمامًا مهما يكن العدد الحقيقي س .

إذن :

مجموعة حلول المتراجحة : −4س^2+2س−1⩾0 هي المجموعة ϕ

مثال 4 : حل ، في ح ، الجملة التالية :

(جـ) { 2 س^2 − 3 س + 1 ⩾ 0 (أ)
وَ
− س^2 + 2 س + 2 > 0 (ب) }

لتكن ي$_1$ و ي$_2$ مجموعتي حلول المتراجحتين (أ) و (ب) على الترتيب .

مجموعة حلول الجملة (جـ) هي المجموعة ي$_1$ ∩ ي$_2$

تعيين المجموعة $ي_1$

لندرس إشارة كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$

لدينا $\Delta = (-3)^2 - 4(2)(1) = 1$

كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$ يقبل جذرين متمايزين هما :

$$س' = \frac{3 - 1}{4} = \frac{1}{2} \quad و \quad س'' = \frac{3 + 1}{4} = 1$$

بما أن معامل $س^2$ موجب فإن كثير الحدود $(2س^2 - 3س + 1)$ يكون موجباً إذا وفقط إذا كان

س ينتمي إلى $\left]-\infty ، \frac{1}{2}\right[\cup \left]1 ، +\infty\right[$

أي :

$$ي_1 = \left]-\infty ، \frac{1}{2}\right[\cup \left]1 ، +\infty\right[$$

تعيين المجموعة $ي_2$

لندرس إشارة كثير الحدود $(-س^2 + 2س + 2)$

لدينا : $\Delta' = (1)^2 - (-1)(2) = 3$

كثير الحدود $(-س^2 + 2س + 2)$ يقبل جذرين متمايزين هما :

$$س' = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-1} = 1 - \sqrt{3}$$

$$س'' = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-1} = 1 + \sqrt{3}$$

بما أن معامل $س^2$ سالب فإن كثير الحدود $(-س^2 + 2س + 2)$ يكون موجباً تماماً إذا وفقط إذا كان

س ينتمي إلى المجال $]1 - \sqrt{3} ، 1 + \sqrt{3}[$.

$ي_2 =]1-\sqrt{3} ، 1+\sqrt{3}[$

$1-\sqrt{3}$ .... $1+\sqrt{3}$

إذن مجموعة حلول الجملة (حـ) هي :

$1-\sqrt{3}$ ..... $\frac{1}{2}$ ..... 1 ..... $1+\sqrt{3}$

$ي_1 \cap ي_2 =]1-\sqrt{3} ، \frac{1}{2}] \cup [1 ، 1+\sqrt{3}[$

مثال 5 : لتكن المتراجحة :

$$(ط - 1)\, س^2 + 2\,(ط + 1)\, س + ط < 0 \qquad (5)$$

حيث س هو المجهول و ط وسيط حقيقي

ولتكن ي مجموعة حلولها .

1) إذا كان $ط - 1 = 0$ أي $ط = 1$ **فإن** :

المتراجحة (5) تكتب : $4س + 1 < 0$ وهي متراجحة من الدرجة الأولى

ومنه $ي =]-\infty ، -\frac{1}{4}[$

2) إذا كان $ط - 1 \neq 0$ أي $ط \neq 1$ فإن المتراجحة (5)

تصبح متراجحة من الدرجة الثانية

لنضع $تا(س) = (ط - 1)\, س^2 + 2\,(ط + 1)\, س + ط$

- إشارة مميز تا (س)

$\Delta' = (ط + 1)^2 - ط\,(ط - 1)$

$\Delta' = 3ط + 1$

$\Delta' = 0 \Leftrightarrow ط = -\frac{1}{3}$

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow ط > -\frac{1}{3}$

• إشارة معامل س^2

معامل س^2 هو (ط − 1)

ط − 1 > 0 ⟺ ط > 1

• نحصل على الجدول التالي :

ط	−∞		$-\frac{1}{3}$		1		+∞
Δ′		−	0	+	‖	+	
ط − 1		−		−	0	+	

النتائج :

• إذا كان ط ∈]−∞ ، $-\frac{1}{3}$[فإن Δ′ < 0 وَ (ط − 1) < 0

إذن : ∀ س ∈ ح تا (س) < 0

ومنه ي = ح

• إذا كان ط ∈]$-\frac{1}{3}$ ، 1[فإن Δ′ > 0 وَ (ط − 1) < 0

إذن : تا (س) يقبل جذرين متمايزين س′ و س″ (س′ < س″)

تا (س) < 0 ⟺ س ∈]−∞ ، س′[∪]س″ ، +∞[

ومنه ي =]−∞ ، س′[∪]س″ ، +∞[

• إذا كان ط ∈]1 ، +∞[فإن Δ′ > 0 وَ (ط − 1) > 0

إذن تا (س) يقبل جذرين متمايزين س′ و س″ (س′ < س″)

تا (س) < 0 ⟺ س ∈]س′ ، س″[

ومنه ي =]س′ ، س″[

• إذا كان ط = $-\frac{1}{3}$ فإن Δ′ = 0 وَ (ط − 1) < 0

إذن تا (س) يقبل جذراً مضاعفاً هو $\left(-\frac{\text{ط}+1}{\text{ط}-1}\right)$ أي $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\forall$ س $\in$ ح $- \left\{\frac{1}{2}\right\}$: تا (س) < 0

ومنه ي $=$ ح $- \left\{\frac{1}{2}\right\}$

- إذا كان ط $= 1$ فإن ط $- 1 = 0$

رأينا أن ي $= \left]-\infty \text{ ، } -\frac{1}{4}\right[$

3 ـ مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

1.3 ـ مجموع وجداء حلّي معادلة من الدرجة الثانية :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$\text{ا س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0 \qquad (1)$$

وليكن Δ مميزها .

إذا كان $\Delta \geqslant 0$ فإن المعادلة (1) تقبل حلّين متمايزين أو متساويين هما :

$$\text{س}' = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}} \quad \text{وَ} \quad \text{س}'' = \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}}$$

لدينا :

$$\text{س}' + \text{س}'' = \frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}} + \frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{ا}}$$

$$\boxed{\text{س}' + \text{س}'' = -\frac{\text{ب}}{\text{ا}}}$$

$$\text{س}' \times \text{س}'' = \left(\frac{-\text{ب} - \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)\left(\frac{-\text{ب} + \sqrt{\Delta}}{2\text{أ}}\right)$$

$$= \frac{\text{ب}^2 - \Delta}{4\text{أ}^2}$$

$$= \frac{\text{ب}^2 - (\text{ب}^2 - 4\text{أ}\text{حـ})}{4\text{أ}^2}$$

$$= \frac{4\text{أ}\text{حـ}}{4\text{أ}^2}$$

$$\boxed{\text{س}' \,.\, \text{س}'' = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}}$$

2.3 ـ حساب أحد الحلين بمعرفة الآخر :

لتكن المعادلة من الدرجة الثانية :

$$\text{أ س}^2 + \text{ب س} + \text{حـ} = 0$$

وليكن α حلاً معلوماً لهذه المعادلة .

يمكن حساب الحل الثاني β باستعمال إحدى المساواتين :

$$\alpha + \beta = -\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \quad ; \quad \alpha\,\beta = \frac{\text{حـ}}{\text{أ}}$$

مثلاً :

لتكن المعادلة $2\text{س}^2 - 3\text{س} + 1 = 0$ (1)

نلاحظ أن العدد 1 هو حل لهذه المعادلة

إذن الحل الثاني هو العدد β حيث

$$1\,.\,\beta = \frac{1}{2} \quad \text{أي} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

3.3 ـ إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية

يمكن تعيين إشارة حلّي معادلة من الدرجة الثانية بدون حسابهما عملياً وذلك بدراسة إشارة جدائهما وَ إشارة مجموعهما .

بالفعل :

- تكون لعددين إشارتان مختلفتان إذا وفقط إذا كان جداؤهما سالباً تماماً .
- تكون لعددين نفس الإشارة إذا وفقط إذا كان جداؤهما موجباً تماماً وتكون عندئذ إشارتهما هي إشارة مجموعهما .

ينتج من ذلك ما يلي :

إذا كانت $ا س^2 + ب س + حـ = 0$ (1) معادلة من الدرجة الثانية وكان Δ مميزها فإن :
• $\frac{حـ}{ا} < 0 \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان إشارتاهما مختلفتان)
• $\left[\frac{حـ}{ا} > 0$ وَ $\Delta > 0$ وَ $-\frac{ب}{ا} > 0\right] \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان موجبان تماماً)
• $\left[\frac{حـ}{ا} > 0$ وَ $\Delta > 0$ وَ $-\frac{ب}{ا} < 0\right] \Leftrightarrow$ (للمعادلة (1) حلان سالبان تماماً)

أمثلة :

1) المعادلة $3س^2 + 5س - 1 = 0$ هي معادلة من الشكل :

$أس^2 + ب س + حـ = 0$

$أ = +3$ ؛ $ب = +5$ ؛ $حـ = -1$

لدينا : $\frac{حـ}{أ} = \frac{-1}{+3} = -\frac{1}{3}$

بما أن $\frac{حـ}{أ} < 0$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين إشارتاهما مختلفتان .

2) المعادلة $2س^2 - 5س + 3 = 0$ هي معادلة من الشكل

$أس^2 + ب س + حـ = 0$

$أ = +2$ ؛ $ب = -5$ ؛ $حـ = +3$

لدينا :

$\frac{حـ}{أ} = +\frac{3}{2}$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1$

$-\frac{ب}{أ} = -\frac{-5}{2} = +\frac{5}{2}$

بما أن $\left(\frac{حـ}{أ} > 0 \text{ وَ } \Delta > 0 \text{ وَ } -\frac{ب}{أ} > 0\right)$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين موجبين تماماً

3) المعادلة $س^2 + 10س + 21 = 0$ هي معادلة من الشكل

$أس^2 + ب س + حـ = 0$

$أ = 1$ ، $ب = 10$ ، $حـ = 21$

لدينا :

$\frac{حـ}{أ} = 21$

$\Delta' = 25 - 21 = 4$

$-\frac{ب}{أ} = -10$

بما أن $\left(\frac{ج}{أ} > 0 \text{ و } \Delta' > 0 \text{ و } -\frac{ب}{أ} < 0 \right)$ فإن هذه المعادلة تقبل حلّين سالبين تماماً

4.3 ـ تمرين محلول

ناقش ، حسب قيم الوسيط الحقيقي ط ، وجود وَ إشارة حلول المعادلة :
$(ط + 2)س^2 - (ط + 4)س + 2 - ط = 0 \quad (1)$

- إذا كان $ط + 2 = 0$ أي $ط = -2$ فإن المعادلة (1) تكتب :
  $-2س + 4 = 0$ وتقبل حلاً واحداً موجبا هو 2 .
- إذا كان $ط + 2 \neq 0$ أي $ط \neq -2$ فإن المعادلة (1)

من الدرجة الثانية وهي من الشكل $أس^2 + ب س + ج = 0$

.

$أ = ط + 2$ ، $ب = -(ط + 4)$ ، $ج = 2 - ط$

لدينا : $\frac{ج}{أ} = \frac{2 - ط}{ط + 2}$

إشارة $\frac{ج}{أ}$ هي إشارة الجداء $(2 - ط)(ط + 2)$ الذي هو كثير حدود

من الدرجة الثانية جذراه (-2) وَ $(+2)$

ومعامل $ط^2$ فيه هو (-1) .

$\Delta = (ط + 4)^2 - 4(ط + 2)(2 - ط)$

$= 5ط^2 + 8ط$

Δ هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه $\left(-\frac{8}{5}\right)$ وَ 0 ومعامل

$ط^2$ فيه هو $(+5)$

$-\frac{ب}{أ} = \frac{ط + 4}{ط + 2}$

إشارة $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ هي إشارة الجداء (ط + 4)(ط + 2) الذي هو كثير حدود من الدرجة الثانية جذراه (− 4) وَ (− 2) ومعامل $ط^2$ فيه هو (+ 1)

يبيّن الجدول التالي إشارة كل من $\frac{حـ}{أ}$ و Δ و $\left(-\frac{ب}{أ}\right)$ والنتائج الممكنة

ط	$\frac{حـ}{أ}$	Δ	$\frac{ب}{أ}$	
$-\infty$				
	−	+	+	
-4			0	يوجد حلان إشارتاهما مختلفتان
	−	+	−	
-2				حل واحد موجب يساوي 2
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$-\frac{8}{5}$		0		حل مضاعف موجب يساوي 3
	+	−	+	لا توجد حلول
0		0		حل مضاعف موجب يساوي 1
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
2	0			حلان أحدهما معدوم والآخر موجب وهو $\frac{3}{2}$
	+	+	+	يوجد حلان موجبان
$+\infty$				

23 جمل معادلات
جمل متراجحات

1 ـ عموميات :

1.1 ـ الدوال العددية لمتغيرين حقيقيين :

تسمى كل دالة للمجموعة ح × ح في المجموعة ح دالة عددية لمتغيرين حقيقيين .

أمثلة :

1) الدالة تا للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

تا (س ، ع) = $س^2 + ع^2$ − س + ع + 1

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي ح × ح .

لدينا مثلا : تا (1 ، 0) = 1 + 0 − 1 + 0 + 1 = 1

تا (0 ، 1) = 0 + 1 − 0 + 1 + 1 = 3

2) الدالة ها للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

ها (س ، ع) = 3 س − 2 ع + 5

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي ح × ح .

لدينا مثلا : ها (1 ، 2) = 3 × 1 − 2 × 2 + 5 = 4

ها (1 ، 4) = 3 × 1 − 2 × 4 + 5 = 0

3) الدالة لا للمجموعة ح × ح في المجموعة ح المعرفة كما يلي :

لا (س ، ع) = $\frac{س}{ع} + \frac{ع}{س} + 1$

هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

مجموعة تعريفها هي $ح^* \times ح^*$.

لدينا مثلا : لا $(-1 ، 2) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{1} + 1 = -\frac{3}{2}$

لا $(1 ، 1) = 1 + 1 + 1 = 3$.

2.1 ـ المعادلات ذات مجهولين حقيقيين :

نسمي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع كل معادلة من الشكل تا (س ، ع) = 0 حيث تا هي دالة عددية للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

إذا كان تا (س ، ع) كثير حدود من الدرجة الأولى نسمي المعادلة تا (س ، ع) = 0 معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع .

نسمي حلاً للمعادلة تا (س ، ع) = 0 كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) من $ح \times ح$ تحقق المساواة تا ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 .

حل المعادلة تا (س ، ع) = 0 هو تعيين مجموعة حلولها .

أمثلة :

1) في $ح \times ح$ المعادلة $س^2 + ع^2 - 2 س + 4 ع = 0$

هي معادلة ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

الثنائية (-1 ، -1) هي حل لهذه المعادلة

الثنائية (1 ، 0) ليست حلا لهذه المعادلة

2) في $ح \times ح$ المعادلة : س + 2 ع − 3 = 0 هي معادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

الثنائية (1 ، 1) هي حل لهذه المعادلة

الثنائية (-1 ، 3) ليست حلا لهذه المعادلة .

3) لتكن ، في $ح \times ح$ ، المعادلة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع : 3 س − ع + 4 = 0 (1)

يمكن كتابة (1) على الشكل ع = 3 س + 4

مجموعة حلول المعادلة (1) هي المجموعة ح حيث :

ح = { (س ، ع) ∈ ح × ح : س ∈ ح وَ ع = 3 س + 4 }

3.1 ـ المعادلات المتكافئة :

- تكون المعادلتان تا (س ، ع) = 0 وَ ها (س ، ع) = 0 متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

  نكتب عندئذ : تا (س ، ع) = 0 ⟸ ها (س ، ع) = 0

- لتكن تا وَ ها دالتين عدديتين للمتغيرين الحقيقيين س ، ع معرفتين على نفس المجموعة وليكن ك عدداً حقيقياً **غير معدوم** .

  لدينا :

  تا (س ، ع) = 0 ⟸ تا (س ، ع) + ها (س ، ع) = ها (س ، ع)

  تا (س ، ع) = 0 ⟸ ك × تا (س ، ع) = 0

4.1 ـ جمل معادلتين :

لتكن تا (س ، ع) = 0 وَ ها (س ، ع) = 0 معادلتين للمجهولين س ، ع .

كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) **تحقق في آن واحد** المساواتين
تا ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 وَ ها ($س_0$ ، $ع_0$) = 0 تدعى حلا للجملة

تا (س ، ع) = 0
ها (س ، ع) = 0

حل هذه الجملة هو إيجاد مجموعة حلولها .

تكون جملتان متكافئتين إذا وفقط إذا كانت لهما نفس مجموعة الحلول .

من الواضح أنه إذا كانت لدينا جملة معادلتين وبدلنا إحدى المعادلتين بمعادلة مكافئة لها نحصل على جملة مكافئة للجملة الأولى .

مثلا : $\begin{cases} 2\text{س} - \text{ع} + 1 = 0 \\ \text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س} + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = 2\text{س} + 1 \\ \text{س}^2 + \text{ع}^2 + \text{س} + 5 = 0 \end{cases}$

زيادة على ذلك توجد قواعد تسمح بتبديل جملة مفروضة بجملة مكافئة لها .

وننص فيما يلي على قاعدتين من هذه القواعد وهما **قاعدة التعويض** (أو طريقة التعويض) **وقاعدة الجمع** (أو طريقة الجمع)

2. حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى لمجهولين

2 . 1. طريقة التعويض

قاعدة :

> في المجموعة ح × ح ، إذا كانت $\text{ب} \neq 0$ فإن
>
> $$\begin{cases} \text{أس} + \text{بع} + \text{جـ} = 0 \\ \text{أ'س} + \text{ب'ع} + \text{جـ'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \dfrac{1}{\text{ب}}\left(-\text{أس} - \text{جـ}\right) \\ \text{أ'س} + \dfrac{\text{ب'}}{\text{ب}}\left(-\text{أس} - \text{جـ}\right) + \text{جـ'} = 0 \end{cases}$$

مثلا : حل في ح × ح الجملة التالية : $\begin{cases} \text{س} - \text{ع} - 3 = 0 \\ 2\text{س} + 5\text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$

حسب ما سبق :

$$\begin{cases} \text{س} - \text{ع} - 3 = 0 \\ 2\text{س} + 5\text{ع} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 3 \\ 2\text{س} + 5(\text{س} - 3) + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 2 \\ 7\text{س} - 14 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = \text{س} - 2 \\ \text{س} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = -1 \\ \text{س} = 2 \end{cases}$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $\{(2 ، -1)\}$

2 . 2 ـ طريقة الجمع :

قاعدة :

> إذا كان α ، β عددين حقيقيين حيث $\alpha \neq 0$ فإن
>
> $$\begin{cases} \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ع} + \text{حـ} = 0 \\ \text{أ}'\,\text{س} + \text{ب}'\,\text{ع} + \text{حـ}' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ع} + \text{حـ}) + \beta(\text{أ}'\,\text{س} + \text{ب}'\,\text{ع} + \text{حـ}') = 0 \\ \text{أ}'\,\text{س} + \text{ب}'\,\text{ع} + \text{حـ}' = 0 \end{cases}$$

مثلا : حل في ح × ح الجملة التالية :
$$\begin{cases} 3\,\text{س} + 5\,\text{ع} - 1 = 0 \\ 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} 3\,\text{س} + 5\,\text{ع} - 1 = 0 \\ 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(3\,\text{س} + 5\,\text{ع} - 1) - 3(2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7) = 0 \\ 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6\,\text{س} + 10\,\text{ع} - 2 - 6\,\text{س} - 9\,\text{ع} - 21 = 0 \\ 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = 23 \\ 2\,\text{س} + 3\,\text{ع} + 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{ع} = 23 \\ \text{س} = -38 \end{cases}$$

اذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي $\{(-38 \text{ ، } 23)\}$

3 . 2 ـ طريقة المحدد

لتكن جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين الحقيقيين س ، ع

$$\begin{cases} \text{أ}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ع} + \text{حـ} = 0 \\ \text{أ}'\,\text{س} + \text{ب}'\,\text{ع} + \text{حـ}' = 0 \end{cases}$$

لحل هذه الجملة يمكن استعمال احدى الطريقتين (التعويض أو الجمع) اللتين تم عرضهما في الفقرة السابقة ؛ ونقدم فيما يلي طريقة أخرى لدراسة هذه الجملة في حالة :

(أ ، ب) ≠ (0 ، 0) وَ (أ' ، ب') ≠ (0 ، 0)

في المستوي المنسوب إلى معلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$)

المعادلة أ س + ب ع + حـ = 0 حيث (أ ، ب) ≠ (0 ، 0)

هي معادلة لمستقيم (Δ) والمعادلة أ' س + ب' ع + حـ' = 0

حيث (أ' ، ب') ≠ (0 ، 0) هي معادلة لمستقيم (Δ') .

الشعاع $\vec{ش}$ $\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

والشعاع $\vec{ش'}$ $\begin{pmatrix} -ب' \\ أ' \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ')

تكون الثنائية (س ، ع) حلا للجملة ،

$$\begin{cases} أ\,س + ب\,ع + حـ = 0 \\ أ'\,س + ب'\,ع + حـ' = 0 \end{cases}$$

اذا وفقط اذا كان (س ، ع) احداثيي نقطة مشتركة للمستقيمين (Δ) وَ (Δ') .

نعلم أن المستقيمين (Δ) وَ (Δ') يتوازيان إذا وفقط

إذا كان المحدد $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}$ معدوماً

ويتقاطعان ، إذاً ، إذا وفقط إذا كان هذا المحدد غير معدوم .

المناقشة :

1) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix} \neq 0$ فإن المستقيمين (Δ) و (Δ') يتقاطعان في نقطة واحدة إحداثياها (س ، ع).

إن حساب س و ع باستعمال إحدى الطريقتين (التعويض أو الجمع) يعطي :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} ب & حـ \\ ب' & حـ' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}} \quad و \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} حـ & أ \\ حـ' & أ' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix}}$$

2) إذا كان $\begin{vmatrix} أ & ب \\ أ' & ب' \end{vmatrix} = 0$ يكون المستقيمان (Δ) وَ (Δ') متوازيين .

يوجد عندئذ عدد حقيقي غير معدوم λ حيث :
$\overleftarrow{ش'} = \lambda \overleftarrow{ش}$ أي $أ' = \lambda أ$ وَ $ب' = \lambda ب$

• إذا كان $حـ' = \lambda حـ$ فإن المعادلتين $أ س + ب ع + حـ = 0$
وَ $أ' س + ب' ع + حـ' = 0$ هما معادلتان لنفس المستقيم .
وتكون عندئذ مجموعة حلول الجملة هي مجموعة حلول إحدى المعادلتين

• إذا كان $حـ' \neq \lambda حـ$ يكون المستقيمان المتوازيان (Δ) وَ (Δ') **متمايزين** تقاطعهما هو المجموعة الخالية والجملة ، عندئذ ، ليس لها حال .

الخلاصة :

لتكن ، في ح × ح ، جملة المعادلتين من الدرجة الأولى للمجهولين س ، ع :

$$(1)\quad \begin{cases} ا س + ب ع + حـ = 0 \\ ا' س + ب' ع + حـ' = 0 \end{cases}$$

- إذا كان : $ا ب' - ب ا' \neq 0$ فان الجملة (1) تقبل حلا واحدا
- إذا كان $ا ب' - ب ا' = 0$ فإن الجملة (1) :
  إما ليس لها حل . وإما لها عدد غير منته من الحلول .

مثال 1 :

لتكن ، في ح × ح ، الجملة

$$\begin{cases} س + 2 ع - 10 = 0 \\ 3 س + ع - 15 = 0 \end{cases}$$

لدينا : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5$

بما أن محدد الجملة غير معدوم فهي ، إذاً ، تقبل حلاً واحداً .

حساب س ، ع :

$$س = \frac{\begin{vmatrix} -10 & 2 \\ -15 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = 4 \quad ; \quad ع = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}}{-5} = 3$$

الحل الوحيد للجملة هو الثنائية (4 ، 3)

مثال 2 :

لتكن ، في $\text{ح} \times \text{ح}$ ، الجملة

$$\begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} = 2 \\ -2\text{س} + 3\text{ع} = -1 \end{cases}$$

لدينا :

$$\begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} = 2 \\ -2\text{س} + 3\text{ع} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\text{س} - 6\text{ع} - 2 = 0 \quad (1) \\ -2\text{س} + 3\text{ع} + 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

لنحسب محدد الجملة السابقة :

لدينا : $\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

فالجملة إذاً إما ليس لها حل وَ إما لها عدد غير منته من الحلول .

نلاحظ أن :

$$(1) \Leftrightarrow -2(-2\text{س} + 3\text{ع} + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\text{س} + 3\text{ع} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2)$$

إذن مجموعة حلول الجملة المعطاة هي مجموعة حلول المعادلة (2)

وهي :

$$(\text{ح}) = \left\{ (\text{س} ، \text{ع}) \in \text{ح} \times \text{ح} : \text{س} \in \text{ح} \text{ و } \text{ع} = \frac{2\text{س} - 1}{3} \right\}$$

مثال 3 :

لتكن ، في $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ، الجملة

$$\begin{cases} -\text{س} + 2\text{ع} - 2 = 0 \\ 3\text{س} - 6\text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$$

لنحسب محدد هذه الجملة

لدينا : $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0$

فالجملة ، إذاً ، إما ليس لها حل وإما لها عدد غير منته من الحلول

$$\begin{cases} -\text{س} + 2\text{ع} - 2 = 0 \\ 3\text{س} - 6\text{ع} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\text{س} - 6\text{ع} + 6 = 0 \\ 3\text{س} - 6\text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\text{س} - 6\text{ع} = -6 \\ 3\text{س} - 6\text{ع} = -1 \end{cases}$$

من الوَاضح أنه لا يمكن أن يكون ($3\text{س} - 6\text{ع}$) مساوياً في آن واحد (-1) و (-6)

إذن الجملة المعطاة ليس لها حل .

3 ـ حل متراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

3 . 1 ـ المتراجحات من الدرجة الأولى ذات المجهولين

• نسمي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع كل متراجحة من الشكل **تا (س ، ع)** > 0

(أو تا (س ، ع) < 0 أو تا (س ، ع) $\geqslant 0$ أو تا (س ، ع) $\leqslant 0$)

حيث تا (س ، ع) هو كثير حدود من الدرجة الأولى للمتغيرين الحقيقيين س ، ع .

- نسمي حلا للمتراجحة **تا (س ، ع) > 0** كل ثنائية ($س_0$ ، $ع_0$) من ح × ح تحقق المتباينة تا ($س_0$ ، $ع_0$) > 0 .

- حل المتراجحة تا (س ، ع) > 0 هو تعيين مجموعة حلولها .

مثال :

في ح × ح ، المتراجحة 3 س + ع − 4 < 0

هي متراجحة من الدرجة الأولى ذات المجهولين س ، ع .

الثنائية (0 ، 1) هي حل لهذه المتراجحة .

الثنائية (2 ، 1) ليست حلا لهذه المتراجحة .

يمكن كتابة المتراجحة (3 س + ع − 4 < 0) على الشكل :

ع < 4 − 3 س

مجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجموعة ح حيث

ح = { (س ، ع) ∈ ح × ح : س ∈ ح وَ ع < 4 − 3 س }

2.3 ـ إشارة (أ س + ب ع + حـ)

المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) .

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية حيث (أ ، ب) ≠ (0 ، 0) .

لتكن الدالة تا للمستوي في ح التي ترفق بكل نقطة ن (س ، ع) العدد الحقيقي تا (ن) = أ س + ب ع + حـ

- لندرس إشارة تا (ن) حسب وضعية النقطة ن في المستوي .

مجموعة النقط ن حيث تا (ن) = 0 هي المستقيم (Δ) الذي معادلته : أ س + ب ع + حـ = 0

الشعاع $\overrightarrow{ش}\begin{pmatrix} -ب \\ أ \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)

لتكن هـ نقطة من المستقيم (Δ) و

$ن_0$ نقطة من المستوي لا تنتمي إلى

(Δ) . (الشكل 1)

ولتكن $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ مركبتي $\overrightarrow{هـ ن_0}$.

لدينا : $\begin{vmatrix} \alpha & -ب \\ \beta & أ \end{vmatrix} \neq 0$

(Δ)

(الشكل 1)

أي $\alpha أ + \beta ب \neq 0$ لأن $\overrightarrow{هـ ن}$ لا يوازي $\overrightarrow{ش}$

من أجل كل نقطة ن من المستوي ، المستقيم الذي يشمل ن ويوازي $\overrightarrow{هـ ن_0}$

يقطع (Δ) في نقطة $ن'$ ($س'$ ، $ع'$) .

من تا ($ن'$) = أ $س'$ + ب $ع'$ + حـ = 0

و $\overrightarrow{ن' ن} = \lambda \overrightarrow{هـ ن_0}$ نستنتج :

$\begin{cases} س - س' = \lambda \alpha \\ ع - ع' = \lambda \beta \end{cases}$ أي $\begin{cases} س = س' + \lambda \alpha \\ ع = ع' + \lambda \beta \end{cases}$

إذن :

تا (ن) = أ ($س'$ + $\lambda \alpha$) + ب ($ع'$ + $\lambda \beta$) + حـ

= λ (α أ + β ب) + (أ $س'$ + ب $ع'$ + حـ)

= λ (α أ + β ب)

بما أن (α أ + β ب) عدد حقيقي ثابت غير معدوم فإن إشارة λ هي التي تحدد إشارة تا (ن) .

إذا كان Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل $ن_0$ والمحدد بالمستقيم (Δ)
و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ) .
فإن العلاقة $\overrightarrow{ن_0 ن} = \lambda\, \overrightarrow{ن_0 هـ}$ تبيّن ما يلي :

- $\lambda = 0 \Leftrightarrow ن \in (\Delta)$
- $\lambda > 0 \Leftrightarrow ن \in \Pi_1$
- $\lambda < 0 \Leftrightarrow ن \in \Pi_2$

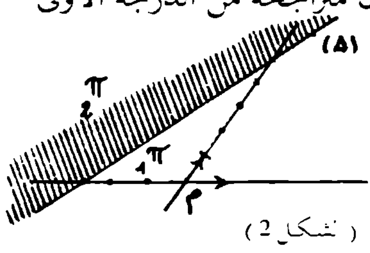
ومنه النتيجة التالية

لا تتغير إشارة العدد تا (ن) لما تتغير النقطة ن في أحد نصفي المستوي المفتوحين المحددين بالمستقيم (Δ)

مثال : إشارة (2 س + 3 ع + 1)
من أجل المبدأ م للمعلم الذي احداثياه (0 ، 0) لدينا
تا (م) = + 1 إذن تا (م) > 0
وبالتالي يكون (2 س + 3 ع + 1) موجباً تماما من أجل كل نقطة تنتمي إلى نصف المستوي المفتوح الذي يشمل م والمحدد بالمستقيم (Δ) الذي معادلته 2 س + 3 ع + 1 = 0 .
ويكون (2 س + 3 ع + 1) سالباً تماما من أجل كل نقطة تنتمي إلى نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ)

3 . 3 ـ الحل البياني لمتراجحات من الدرجة الأولى ذات مجهولين

حسب ما سبق فإن التمثيل البياني لمجموعة حلول متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهولين هو نصف مستوٍ .
مثال :
التمثيل البياني لمجموعة حلول



(شكل 2)

المتراجحة : 2 س $-$ ع $+ 5 > 0$

ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته : 2 س $-$ ع $+ 5 = 0$
وليكن Π_1 نصف المستوي المفتوح الذي يشمل المبدأ م والمحدد بالمستقيم (Δ) و Π_2 نصف المستوي المفتوح الآخر المحدد بالمستقيم (Δ) (الشكل 2) .
لنضع تا (ﻫ) $\doteq 2$ س $-$ ع $+ 5$
لدينا : تا (م) $= 2.0 - 0 + 5 = + 5$ إذن تا (م) > 0
تمثل مجموعة حلول المتراجحة المقترحة بنصف المستوي Π_1 غير المشطوب في الشكل 2

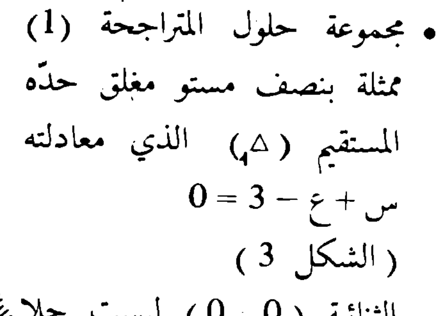
3 .4 ـ الحل البياني لجملة متراجحات من الدرجة الأولى لمجهولين

لتكن الجملة :
$$\begin{cases} \text{أ س} + \text{ب ع} + \text{ح} \geqslant 0 \quad (1) \\ \text{أ' س} + \text{ب' ع} + \text{ح'} > 0 \quad (2) \end{cases}$$

مجموعة حلول الجملة هي مجموعة الثنائيات (س ، ع) التي تحقق ، في آن واحد ، (1) وَ (2) .
نعلم أن :
مجموعة حلول المتراجحة (1) ممثّلة بنصف مستو مغلق ح$_1$ وَ مجموعة حلول المتراجحة (2) ممثّلة بنصف مستوٍ مفتوح ح$_2$.
وبالتالي :
تكون مجموعة حلول الجملة المقترحة ممثّلة بالمجموعة ح$_1 \cap$ ح$_2$.

مثال :
الحل البياني للجملة
$$\begin{cases} \text{س} + \text{ع} - 3 \geqslant 0 \quad (1) \\ 2\,\text{س} - \text{ع} > 0 \quad (2) \end{cases}$$

المستوي منسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)



(الشكل 3)

• مجموعة حلول المتراجحة (1) ممثلة بنصف مستو مغلق حدّه المستقيم (Δ_1) الذي معادلته

س + ع − 3 = 0

(الشكل 3)

الثنائية (0 ، 0) ليست حلا للمتراجحة (1) .

لنشطب إذاً نصف المستوي المفتوح المحدد بالمستقيم (Δ_1) الذي يشمل المبدأ م

هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولا للمتراجحة (1) .

• مجموعة حلول المتراجحة (2) ممثلة بنصف مستوٍ مفتوح حدّه المستقيم (Δ_2) الذي معادلته 2 س − ع = 0 .

الثنائية (0 ، 1) حل للمتراجحة (2) .

لنشطب إذاً نصف المستوي المغلق المحدد بالمستقيم (Δ_2) والذي لا يشمل النقطة ا (0 ، 1) .

هذا نصف المستوي المشطوب يمثل مجموعة الثنائيات التي ليست حلولا للمتراجحة (2) .

• مجموعة حلول الجملة ممثلة بتقاطع نصفي المستوي اللذين يمثلان حلول المتراجحتين على الترتيب وهو الجزء غير المشطوب في الشكل .

تمـارين

كثيرات الحدود :

1. أنجز العمليات التالية على وحيدات الحد للمتغير س
ثم عيّن ، في كل حالة ، درجة وحيد الحد الناتج :

• $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5}\,\text{أ ب س}^{2}\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\text{أ س}\right)^{2}\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\text{أ ب}^{2}\right)$

• $-7\,\text{س}^{2}+\frac{1}{3}\,\text{س}^{2}-\frac{2}{5}\,\text{س}^{2}$ • $5\sqrt{2}\,\text{س}^{2}+3\sqrt{8}\,\text{س}^{2}-\sqrt{50}\,\text{س}^{2}$

2. 1) بسط ورتب كثيرات الحدود تا (س) ، ها (س) ، عا (س) التالية :

$\text{تا}(\text{س}) = -\frac{1}{2}\,\text{س}^{4}+2\,\text{س}^{3}+1+\text{س}^{3}-2\,\text{س}^{2}$

$\text{ها}(\text{س}) = \text{س}-1+\text{س}^{2}-\text{س}+5-(2\,\text{س}^{2}-5\,\text{س})$

$\text{عا}(\text{س}) = \text{س}\sqrt{3}+\text{س}-5-(\text{س}^{2}-\text{س}\sqrt{2}+1)$

2) احسب ورتب المجاميع التالية :

- تا (س) + ها (س) + عا (س)
- تا (س) − ها (س) + عل (س)
- − تا (س) + ها (س) − عا (س)

3. تا (س) ، ها (س) ، عا (س) كثيرات حدود حيث :

$\text{تا}(\text{س}) = -\text{س}^{3}+3\,\text{س}^{2}-7\,\text{س}+5$

$\text{ها}(\text{س}) = 2\,\text{س}^{3}-3\,\text{س}^{2}+2\,\text{س}-1$

$\text{عا}(\text{س}) = -3\,\text{س}^{3}+5\,\text{س}-2$

أُحسب ورتب كثيرات الحدود التالية :

ك (س) = 2 تا (س) + 2 ها (س) − عا (س)

ل (س) = 2 ها (س) + 2 عا (س) − تا (س)

ط (س) = 2 عا (س) + 2 تا (س) − ها (س)

م (س) = تا (س) + ها (س) + عا (س)

ه (س) = ك (س) + ل (س) + ط (س)

4. تا (س) ، ها (س) ، عا (س) كثيرات حدود حيث :

$\text{تا}(\text{س}) = -2\,\text{س}^{3} + \text{س}^{2} - 5$

$\text{ها}(\text{س}) = \frac{1}{2}\,\text{س}^{3} + \sqrt{2}\,\text{س}^{2} + 3\,\text{س} - 1$

$\text{عا}(\text{س}) = -\sqrt{3}\,\text{س}^{3} + \frac{5}{2}\,\text{س}$

أُحسب $\text{تا}(-1)$ ؛ $\text{ها}(-2\sqrt{2})$ ؛ $\text{عا}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

5. أُحسب الجداءات التالية :

$(\text{س}^{4} + 8\,\text{س}^{2} - 7)(-2\,\text{س}^{2} + \text{س} - 1)$

$(\text{س}^{3} + 2\,\text{س}^{2} + \text{س} - 1)(\text{س}^{3} - 2\,\text{س}^{2} + \text{س} + 1)$

$(\text{س}^{2} + \text{س} + 1)(\text{س}^{2} - \text{س} + 1)(\text{س}^{2} - 1)$

6. حلل كلا من كثيرات الحدود التالية :

1) $(7\,\text{س} - 1)^{2} - (7\,\text{س} - 1)(3\,\text{س} + 2)$

2) $(4 - 3\,\text{س})(2 + 3\,\text{س}) - 2(1 - 2\,\text{س})(3\,\text{س} - 4)$

3) $2(4\,\text{س}^{2} + 2\,\text{س}) + 3(2\,\text{س} + 1)$

4) $\text{س}^{2} - 9 - (4\,\text{س} + 5)(\text{س} - 3)$

5) $4(4 - \text{س}^{2}) - (\text{س} - 2)^{2}$

6) $(5\,\text{س} - 10)(\text{س} - 3) - 3(\text{س}^{2} - 4)$

7) $(\text{س}^{2} - 16)^{2} - (\text{س} + 4)^{2}$

8) $12\,\text{س}^{3} - 16\,\text{س}^{2} - (3\,\text{س} - 4)$

9) $2\,\text{س}^{2} - 18 - (\text{س} + 3)^{2} + 8\,\text{س} + 24$

10) $9\,\text{س}^{2} - 12\,\text{س} + 4 + (6\,\text{س} - 4)(\text{س} + 4) - 18\,\text{س}^{2} + 8$

11) $\text{ع}^{2} - (\text{س} - 1)^{2} - 2(\text{س} - 1)(\text{ع} + \text{س} - 1)$

12) $\text{س}^{2} + \text{ع}^{2} + 2\,\text{ع}\,\text{س} - 9\,\text{ا}^{2} + 6\,\text{ا}\,\text{ب} - \text{ب}^{2}$

13) $(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا}^{2} - \text{حـ}^{2}) - (\text{ا} - \text{حـ})(\text{ا}^{2} - \text{ب}^{2})$

14) $\text{ا}^{2}\,\text{س}\,\text{ع} + \text{ا}\,\text{ب}\,\text{ع}^{2} + \text{ب}^{2}\,\text{س}\,\text{ع} + \text{ا}\,\text{ب}\,\text{س}^{2}$

15) أ^{4} + أ^{3} − أ^{2} − أ

16) (س^{2} − 4) + (س^{3} − 8)

17) (2 س − 1)^{3} − 8 س^{3} + 1

18) 2 س^{6} − 6 س^{4} + 6 س^{2} − 2

7. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

تا (س) = س^{4} − 6 س^{3} + 13 س^{2} − 12 س + 4

ها (س) = س^{4} + س^{2} + 1

عيّن الأعداد الحقيقية أ′ ، ب′ ، أ ، ب بحيث يكون :

$\forall$ س $\in$ ح : (س^{2} + أ′ س + ب′)^{2} = تا (س)

$\forall$ س $\in$ ح : (س^{2} + س + 1) (س^{2} + أ س + ب) = ها (س) .

8. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{5} − 4 س^{3} + 5 س + 10

عيّن كثير الحدود ها (س) بحيث يكون :

$\forall$ س $\in$ ح : تا (س) = (س + 2) ها (س)

9. تا (س) و ها (س) كثيرا حدود حيث :

تا (س) = س^{3} − 13 س^{2} + 5 س + 34

ها (س) = س^{4} − س^{2} + 2 س − 1

هل توجد أعداد حقيقية أ′ ، ب′ ، أ ، ب ، حـ بحيث يكون :

$\forall$ س $\in$ ح : (س − 2) (س^{2} + أ′ س + ب′) = تا (س)

$\forall$ س $\in$ ح : (س^{2} + س − 1) (أ س^{2} + ب س + حـ) = ها (س)

10. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{4} − س^{3} + 2 س^{2} − 2

أُحسب تا (1) واستنتج تحليلاً لكثير الحدود تا (س) .

11. تا (س) كثير حدود حيث :

تا (س) = س^{3} − 5 س^{2} + 18

أوجد كثير حدود ها (س) بحيث يكون :

$\forall$ س $\in$ ح تا (س) = (س − 3) ها (س) .

12. تا (س) كسر ناطق حيث تا (س) = $\frac{2\text{س}^2 - \text{س} - 1}{2\text{س} - 3}$

1) عيّن مجموعة التعريف ف للدالة الناطقة تا

2) عيّن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ بحيث يكون :

$$\forall\ \text{س} \in \text{ف} :\ \text{تا}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س} + \text{ب} + \frac{\text{حـ}}{2\text{س} - 3}$$

13. نفس التمرين السابق من أجل تا (س) $\frac{-2\text{س}^2 + 5\text{س}}{2\text{س} - 3}$

14. عيّن مجموعة التعريف لكل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

1) $\frac{8\text{س}^2 + 2\text{س} - 15}{2\text{س}^2 + 3\text{س}}$ ، 2) $\frac{\text{س}^3 + 4\text{س}^2 + 4\text{س}}{\text{س}^2 + 8}$

3) $\frac{\text{س}^3 + \text{س}^2 - 10\text{س} + 8}{(\text{س} - 2)(\text{س}^2 - 1)}$

4) $\frac{2\text{س}}{\text{س}^2 - 1} + \frac{3 - \text{س}}{\text{س} - 1} - \frac{6}{\text{س} + 1}$

5) $\frac{3\text{س}^3 + \text{س}^2}{\text{س}^3 - 2\text{س}^2} - \frac{6\text{س}^2 - 54}{\text{س}^3 - 9\text{س}} - \frac{\text{س} + 12}{\text{س}^2 - 2\text{س}}$

6) $\frac{7\text{س} + 6}{\text{س} + 2} + \frac{18 - 2\text{س}^2}{\text{س}^2 - 3\text{س}} + \frac{-2\text{س}^2 + 8\text{س} - 8}{\text{س}^2 - 4}$

7) $1 + \dfrac{1 + \dfrac{1 + \text{س}}{1 - 3\text{س}}}{1 - 3\,\dfrac{1 + \text{س}}{1 - 3\text{س}}}$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الأولى

15. هل المعادلتان التاليتان ، في ح . متكافئتان ؟

$$س + \frac{3}{س - 1} = س^2$$

$$\frac{3}{س - 1} = س^2 - س$$

16. نفس التمرين من أجل :

$$س^3 - 3 س^2 + 2 س = س (س - 1)$$

$$س^2 - 3 س + 2 = س - 1$$

17. نفس التمرين من أجل :

$$س + \frac{س^3}{5} = س^2 - 1$$

$$5 س + س^3 = 5 (س^2 - 1)$$

18. نفس التمرين من أجل :

$$س^2 - 3 س = س$$

$$س^2 - 3 س + \frac{1}{س} = س + \frac{1}{س}$$

19. نفس التمرين من أجل :

$$\sqrt{س + 1} = 1 - س$$

$$س + 1 = (1 - س)^2$$

20. هل المتراجحتان التاليتان في ح متكافئتان ؟

$$4 س^2 - 2 س < - 2 س^3 + 4 س$$

$$- 2 س^2 + س < س^3 - 2 س$$

21. نفس التمرين من أجل :

$$4 س^2 - 2 س \leqslant - 2 س^3 + 4 س$$

$$2 س - 1 \leqslant - س^2 + 2$$

22. نفس التمرين من أجل :

$3\text{س} + 1 \leqslant \sqrt{\text{س} - 4}$ ؛ $(3\text{س} + 1)^2 \leqslant \text{س} - 4$

23. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $\dfrac{3(3\text{س} - 1)}{7} + \dfrac{\text{س}}{2} = \dfrac{5(3 - 2\text{س})}{4}$

2) $\dfrac{\text{س} + 1}{4} - \dfrac{2\text{س} - 1}{5} + \dfrac{3\text{س} + 1}{2} = \dfrac{27\text{س} + 19}{20}$

3) $\dfrac{2\text{س}}{3} - \dfrac{3\text{س} - 1}{5} = \dfrac{2(\text{س} - 3)}{3} - \dfrac{3(\text{س} + 1)}{5}$

4) $\dfrac{9\text{س} + 7}{2} - \left(\text{س} - \dfrac{\text{س} - 2}{7}\right) = 36$

5) $\text{س}(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{2} = \text{س} - 2$

6) $0{,}2\text{س} - 3{,}8(\text{س} + 1) = 1{,}4(0{,}5\text{س} - 3) + 2{,}3$

24. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $2\text{س} + 3(\text{س} - 2) + 9 = 0$

2) $\text{س}(\text{س} + 3) + 5 = \text{س}^2 - 1$

3) $5\text{س}^2 = 3\text{س}$

4) $3(\text{س} - 2) = \text{س}^2 - 4$

5) $(\text{س} - 1)^2 + (\text{س}^2 - 1) = 0$

6) $\text{س}^4 + 2\text{س}^3 + \text{س}^2 = 0$

25. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س :

1) $\dfrac{2\text{س} + 1}{\text{س} + 3} = \dfrac{4\text{س} + 3}{2\text{س} + 5}$

2) $\dfrac{\text{س}^2}{\text{س} + 1} - 2\text{س} = \dfrac{1}{\text{س} + 1} - 1$

3) $\frac{2}{\text{س} - 1} + \frac{1}{\text{س}^2 - 1} = \frac{3}{\text{س} + 1}$

4) $\frac{\text{س} + 1}{2(\text{س} + 2)} + \frac{1}{\text{س} + 1} = \frac{1}{(\text{س} + 1)(\text{س} + 2)}$

26. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $2\text{س} + 4 \geqslant 5\text{س} - 2$

2) $4\text{س} - 5 < 2(\text{س} + 3)$

3) $\text{س} - 12 \geqslant 4\text{س}$

4) $\text{س} - 7 + 3\text{س} > 2(\text{س} + 1)$

5) $5\text{س} > 3(\text{س} - 1)$

6) $2\text{س} + 3 \geqslant 4\text{س} - 9$

7) $\frac{4\text{س}}{5} - \frac{\text{س}}{10} > \frac{\text{س}}{2} + 3$

8) $\frac{\text{س} + 2}{2} - 1 < \frac{2\text{س} + 1}{3} - 2$

27. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $(\text{س} - 2)(\text{س} + 3) < 0$

2) $\text{س}^2 - 5\text{س} \geqslant 0$

3) $\text{س}^2 > 4$

4) $\text{س}(\text{س}^2 - 9) > 0$

5) $\frac{3\text{س} - 3}{\text{س} + 1} > 0$

6) $\frac{\text{س} + 2}{\text{س}} < 3$

7) $\frac{\text{س} + 2}{2\text{س} - 3} \leqslant 0$

8) $\frac{3\text{س} - 1}{\text{س} + 3} > 2$

9) $5\text{س} + 2|\text{س} - 1| \geqslant 4$

10) $|\text{س}| + \frac{3}{4} < \text{س} + 5$

28. حل ، في ح ، جمل المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $\begin{cases} 2\text{س} + 3 > \text{س} \\ \text{س} - 5 > 4 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{س} + 3 < 2 \\ \text{س} < 4\text{س} - 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\text{س} - 1 \geqslant 0 \\ 2\text{س} < 3\text{س} - 5 \end{cases}$　　4) $\begin{cases} 2\text{س} + 1 > 3 \\ \text{س} < 5 \\ 3 < 7 - 2\text{س} \end{cases}$

29. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط

1) $\text{ط}\,\text{س} = \text{ط} + 1$

2) $\text{ط}\,\text{س} - 1 = \text{س} + \sqrt{2}$

3) $2\,\text{ط}\,\text{س} + 3 = 6\,\text{ط} + \text{س}$

4) $(\text{ط} - 2)\,\text{س} = \text{ط}^2 - 4$

5) $\text{ط}^2\,\text{س} - \text{ط}^2 - \text{ط} = \text{س}$

6) $\frac{1}{\text{ط}} - \text{س} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} + \text{ط}$

7) $\frac{1}{\text{س}} - \frac{2}{\text{ط}} = 1$

8) $\frac{\text{ط}}{\text{س} - 1} = \frac{\text{س} + \text{ط}^2}{\text{س}^2 - 1}$

9) $\frac{\text{س}}{\text{ط} - \text{س}} + \frac{\text{س}}{\text{ط} + \text{س}} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ط}^2 - \text{س}^2}$

30. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س والوسيط الحقيقي ط

1) $\text{ط}\,\text{س} > \text{س} + 2$

2) $\text{ط}^2\,\text{س} + 2 > 3$

3) $2\,\text{ط}\,\text{س} + 3 > \text{س} + 6\,\text{ط}$

4) $2\,\text{س} + 3\,\text{ط} \geqslant \text{ط}\,\text{س} + 6$

5) $\frac{\text{س} + 1}{\text{ط}} - \frac{3\text{س} - 1}{3} \geqslant 1$

6) $\frac{2\text{س}}{(\text{ط} + 1)^2} \geqslant \frac{\text{س} + 1}{\text{ط} + 1}$

7) $\frac{2\text{س}}{\text{ط}} - 3\text{س} \geqslant \frac{\text{س} + 1}{2\,\text{ط}} + \frac{1}{2}$

المعادلات والمتراجحات من الدرجة الثانية :

31. حل ، في ح ، كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س :

1) $9\text{س}^2 = 7$

2) $\frac{\text{س}^2}{25} = 9$

3) $(\text{س} + \sqrt{2})^2 = 4$

4) $(3\text{س} - 4)^2 = 16$

5) $(\text{س} + 2)^2 = 7$

6) $(-\text{س} + \sqrt{2})^2 = 3$

7) $8\text{س}^2 - 2 = 0$

8) $4\text{س}^2 - 5 = \text{س}^2 + 70$

9) $(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) = 16$

10) $5\text{س}^2 - 3\text{س} = 0$

11) $2\text{س}^2 = 4\text{س}$

12) $(2\text{س} + 3)(3\text{س} - 2) + 6 = 0$

13) $(\text{س} - 3)(\text{س} + 3) = 3\text{س} - 9$

32. اكتب كلاً من كثيرات الحدود التالية على شكلها النموذجي . ثم عيّن مجموعة جذور كل من هذه كثيرات الحدود

1) $9\text{س}^2 - 24\text{س} + 1$

2) $\text{س}^2 - 6\text{س} + 1$

3) $12\text{س}^2 + 4\sqrt{6}\,\text{س} + 2$

4) $-5\text{س}^2 + 9\text{س} - 5$

5) $3\text{س}^2 + \text{س} - 4$

6) $-5\text{س}^2 + 10\sqrt{2}\,\text{س} - 10$

7) $3\text{س}^2 + \text{س} + \sqrt{2}\,\text{س} + 5$

8) $2\text{س}^2 - 3\text{س} - 20$

33. حل ، في ح ، باستعمال القوانين ، كلا من المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\frac{\text{س}^2}{2} - 3\text{س} + \frac{5}{2} = 0$

2) $\frac{\text{س}}{5} + 9 + \left(-\frac{\text{س}}{2} + 3\right)^2 = 0$

3) $-\text{س}^2 = -4\text{س}^2 + 4\text{س} - 1$

4) $\text{س}^2 + 4\text{س} = 21$

5) $3\text{س} + \text{س}^2 + 5 = 0$

6) $4\text{س}^2 + 12\text{س} = -9$

7) $5\text{س}^2 - 7\text{س} - 34 = 0$

8) $\text{س}^2 + \text{س}\sqrt{2} = 4$

9) $\text{س}^2 + 2\text{س}\sqrt{2} + 1 = 0$

10) $4\text{س}^2 - 4\text{س}\sqrt{5} + 5 = 0$

11) $\text{س}^2 - 2(1+\sqrt{2})\text{س} = 6 - 2\sqrt{2}$

12) $\sqrt{2}\,\text{س}^2 + (1+\sqrt{2})\text{س} + 1 = 0$

34. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $(2\text{س} + 3)(3\text{س} - 5) + 14 = 0$

2) $(4\text{س} + 3)^2 + (\text{س} - 1)^2 = 0$

3) $(2\text{س} - 1)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\text{س}\right)^2 = 0$

4) $(2\text{س} - 1)^3 = 8\text{س}^3 - 2$

5) $(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 3) = \text{س}^3 - \text{س}$

6) $14\text{س}^2 - (2\text{س} - 11)(5\text{س} + 4) = 33\text{س} + 22$

35. عيّن مجموعة تعريف كل كسر من الكسور الناطقة التالية . ثم اختزل كلا منها :

1) $\dfrac{6\text{س}^2 + 5\text{س} - 6}{4\text{س}^2 - 9}$

2) $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س}}{\text{س}^2 - 5\text{س} + 6}$

3) $\dfrac{\text{س}^2 - \text{س} - 2}{2\text{س}^2 - 5\text{س} + 2}$

4) $\dfrac{2\text{س}^2 - 3\text{س} - 5}{4\text{س}^2 - 20\text{س} + 25}$

5) $\dfrac{2\text{س}^2 + 4\text{س} - 6}{-\text{س}^2 - \text{س} + 6}$

6) $\dfrac{\text{س}^3 - 8}{3\text{س}^2 - 5\text{س} - 2}$

7) $\dfrac{\text{س}^2 + 2\text{س} - 1}{\text{س}^2 - 2\text{س}\sqrt{2} + 1}$

8) $\dfrac{2\text{س}^2 + \text{س}\sqrt{2} - 2}{\text{س}^2 - 2}$

36. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $(\text{س} + 1)(2\text{س} + 3) = (\text{س} + 1)(\text{س}^2 - 5)$

2) $2\text{س}^4 + \text{س}^3 - \text{س} - 2 = 0$

3) $(7\text{س}-1)^2-(4\text{س}-3)^2=5(3\text{س}+2)^2$

4) $(\text{س}+1)^3+(\text{س}+2)^3=(\text{س}-2)^3+(\text{س}-1)^3$

5) $(\text{س}^2-7\text{س}-4)^2=(\text{س}^2-9\text{س}+4)^2$

6) $\text{س}^3-1+(\text{س}-1)(\text{س}+2)=0$

7) $\text{س}^3-4\text{س}^2+4\text{س}-1=\text{س}-\text{س}^2$

37. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\dfrac{2\text{س}^2+5\text{س}-3}{3\text{س}^2+\text{س}-2}=0$

2) $\dfrac{2\text{س}^2+\text{س}-15}{\text{س}^2+5}=0$

3) $\dfrac{2\text{س}^2-\text{س}\sqrt{2}-2}{\text{س}^2+(\sqrt{2}-1)\text{س}-\sqrt{2}}=0$

4) $\dfrac{-\text{س}^3+2\text{س}^2-2\text{س}+4}{\text{س}^3-\text{س}^2+\text{س}-1}=0$

5) $\dfrac{\text{س}-2}{2\text{س}+1}=\dfrac{3\text{س}-1}{\text{س}-3}$

6) $\dfrac{1}{\text{س}-1}+\dfrac{1}{\text{س}-2}=8$

7) $\dfrac{3}{2(\text{س}^2-1)}-\dfrac{1}{4(\text{س}+1)}=\dfrac{1}{8}$

8) $\dfrac{3}{\text{س}^2+\text{س}-2}+\dfrac{1}{\text{س}+2}=\dfrac{1}{\text{س}-1}$

9) $\dfrac{1}{\text{س}-2}+\dfrac{7\text{س}+8}{\text{س}^2+2\text{س}+4}=\dfrac{12}{\text{س}^3-8}$

10) $\left(\dfrac{2\text{س}-1}{\text{س}-2}\right)^2-\dfrac{4\text{س}-1}{\text{س}-2}=1$

38. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س

1) $س^2 + |س| - 1 = 0$ 2) $س^2 + |س - 3| = 0$

3) $|س| + |س^2 - 1| = 0$ 4) $|س - 5| + |س^2 - 25| = 0$

5) $|س - 5| - |س^2 - 25| = 0$

39. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س .

1) $\sqrt{س^2 + 1} = س - 3$ 2) $\sqrt{س^2 - 1} = س + 2$

3) $\sqrt{س^2 - 4} = \frac{س}{2} - 1$ 4) $\sqrt{س^2 - 4 س + 4} = س$

5) $\sqrt{س^2 - 4 س + 4} = |س|$

40. ادرس إشارة كل من كثيرات الحدود التالية :

1) $-3 س^2 - 6$ 2) $- س^2 + 7 س$

3) $(س - 2)^2 + 5$ 4) $2 س^2 + 6 س - 1$

5) $4 س^2 - 4 س + 3$ 6) $2 س^2 + س - 1$

7) $- س^2 + 2 س + 15$ 8) $3 س^2 - 10 س + 3$

9) $- س^2 + 2 س - 15$

41. ادرس إشارة كل من الجداءآت التالية :

1) $س (س^2 + س - 2)$

2) $(2 - س) (س^2 - 5 س + 6)$

3) $(2 - 3 س) (س^2 - س - 2) (س^2 - س + 1)$

4) $(س - 2) (س^2 - 2 س + 1) (2 س - س^2 - 5)$

42. ادرس إشارة كل من الكسور الناطقة التالية :

1) $\frac{س - 1}{س^2 - 2 س - 3}$ 2) $\frac{س^2 + 2 س - 3}{س^2 - س - 2}$

3) $\frac{س - 2}{س + 1} + س - 2$

43. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $-\text{س}^2 + \text{س} > 0$
2) $\text{س}^2 > 4$
3) $\text{س}^2 < \text{س}$
4) $\text{س}^2 - 6\text{س} + 1 \geqslant 0$
5) $\text{س}^2 - 2\text{س} + 7 < 0$
6) $(2\text{س} - 3)^2 < (\text{س} - 1)^2$
7) $(\text{س} + 1)^2 + 4(\text{س}^2 - 1) < 0$
8) $5\text{س} + 2 - 4\text{س}^2 \leqslant 0$
9) $(\text{س} - 6)^2 < (\text{س} - 10)(\text{س} - 2)$
10) $\dfrac{(\text{س} - 1)^2}{2} - 3(\text{س} - 1) > 0$
11) $2\text{س}^2 + \dfrac{1}{5}\text{س} \leqslant \dfrac{2}{5}$

44. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $(\text{س} - 1)(\text{س}^2 + 2)(\text{س}^2 - 9) > 0$
2) $(2 - \text{س} - \text{س}^2)(\text{س}^2 + 2\text{س} + 1) \leqslant 0$
3) $\text{س}(\text{س} + 1)^2(\text{س}^2 - \text{س} - 6) \leqslant 0$
4) $(\text{س}^2 - 4)^2(\text{س}^2 - 5\text{س} + 6) > 0$
5) $(\text{س}^2 - 5\text{س} + 6)(\text{س}^2 + 3\text{س} + 2) < 0$

45. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .

1) $\dfrac{\text{س}}{\text{س} + 4} > 0$
2) $\dfrac{2\text{س} + 1}{\text{س} - 3} \leqslant 0$
3) $\dfrac{2\text{س} + 3}{\text{س} - 1} > 4$
4) $\text{س} > \dfrac{3}{\text{س} - 2}$
5) $\dfrac{\text{س} - 1}{2\text{س}} < \dfrac{1}{\text{س} + 2}$
6) $\dfrac{2\text{س}^2 - 2\text{س}}{\text{س} + 1} < 0$
7) $\dfrac{5\text{س} - \text{س}^2}{(4\text{س} - 1)^2 - 49} > 0$
8) $\dfrac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1} \leqslant \dfrac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}$
9) $\dfrac{5\text{س}}{3\text{س} + 1} > \dfrac{5}{3}$
10) $\dfrac{\text{س}^2 - 3\text{س} + 1}{\text{س}^2 - 4} > 1$

46. حل ، في ح ، كلا من الجمل التالية :

1) $4 < س^{2} + 3س + 5 < 12$

2) $-4 < \dfrac{1}{س - 1} < 2$

3) $\dfrac{س + 2}{س} < 3 < \dfrac{س}{س - 1}$

4) $-2 \leqslant س + \dfrac{1}{س} < 2$

5) $\begin{cases} 5س + 4 < 0 \\ 3س^{2} - 7س + 9 > 0 \\ س^{2} - 15 > 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{س + 3}{س - 1} - \dfrac{1}{س} \leqslant 0 \\ \dfrac{س^{2} - 1}{3س - 4} > \dfrac{س + 1}{س} \end{cases}$

47. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $|س - 3| < 1$

2) $|س - 5| > 5$

3) $|س + 3| > |3س - 2|$

4) $(س - 1)(2س + 1) > |س - 1|$

5) $\dfrac{|س| - 1}{|س| + 2} < 1$

48. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س

1) $\sqrt{س} < 2$

2) $\sqrt{س^{2}} < 4$

3) $\sqrt{س^{2} - 4} \leqslant 0$

4) $\sqrt{س^{2} + 1} \leqslant 1$

49. ط عدد حقيقي و $تا_{ط}(س)$ كثير حدود حيث :

$تا_{ط}(س) = (ط^{2} - 4)س^{2} - (ط + 2)س + 1 - ط^{2}$

1) عيّن قيم ط بحيث يكون $تا_{ط}(س)$ كثير حدود من الدرجة الثانية .

2) عيّن قيم ط بحيث يكون :

أ) $تا_{ط}(س)$ كثير حدود من الدرجة الأولى

ب) $تا_{ط}(1) = 0$

حـ) $تا_{ط}(0) = 0$

د) $تا_{ط}(2) = 0$

حل المعادلة $تا(س) = 0$ في كل من الحالات الثلاث أ) ب) حـ)

50. ط عدد حقيقي و تا$_{ط}$ (س) كثير حدود حيث :

تا$_{ط}$ (س) = (ط − 1) س^{2} + 2 (ط + 3) س + ط

1) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :

تا$_{ط}$ (س) موجبا من أجل س = 2 وَ سالبا من أجل س = − $\sqrt{5}$

2) عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي س بحيث يكون

تا$_{1}$ (س) موجبا وَ تا$_{0}$ (س) سالبا

51. حل ، في ح ، المعادلات التالية ذات المجهول س
والوسيط الحقيقي ط .

1) 3 س^{2} − 27 = (س − 3) (ط س + 1)

2) س^{2} − 1 = ط (س^{2} + 1)

3) س^{2} − 1 = 2 ط (س^{2} + 1)

4) (س − 1)^{2} = ط (س^{2} − 1)

5) س^{2} − 4 س + 4 − 2 ط (س − 2) + ط^{2} = 0

52. حل ، في ح ، المتراجحات التالية ذات المجهول س .
والوسيط الحقيقي ط

1) ط س^{2} + 2 س − ط > 0

2) ط س^{2} − 2 س + 1 < 0

3) 2 س^{2} + ط س − ط + 1 < 0

4) (ط س − 1) (س − 2) > 0

53. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط بحيث يكون :

1) ∀ س ∈ ح : (5 − ط) س^{2} − 2 (1 − ط) س + 2 (1 − ط) < 0

2) ∀ س ∈ ح : (2 ط + 5) س^{2} + 4 (ط + 3) س + 3 ط > 0

54. عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتي لا يكون للمتراجحة :

(ط − 5) س^{2} − (3 ط + 4) س + ط − 5 > 0 حل

55. ط عدد حقيقي وَ $تا_{ط}$ (س) كثير حدود حيث :

$تا_{ط}(س) = (ط + 2)\,س^2 - 2\,(ط - 1)\,س + ط - 2$

عيّن مجموعة قيم الوسيط ط بحيث تكون إشارة $تا_{ط}$ (س) ثابتة مهما كان العدد س .

ما هي عندئذ إشارة $تا_{ط}$ (س) ؟

56. نفس الأسئلة بالنسبة إلى كثير الحدود :

$تا_{ط}(س) = (ط + 2)\,س^2 + ط\,(س) + ط - 1$

57. تحقق أن لكل معادلة من المعادلات التالية حلا هو أحد الأعداد : -1 ، $+1$ ، -2 ، $+2$

ثم احسب حلها الثاني :

1) $س^2 + 7\,س - 8 = 0$ 2) $-س^2 + س + 6 = 0$

3) $2\,س^2 + 3\,س - 5 = 0$ 4) $2\,س^2 - س - 10 = 0$

5) $4\,س^2 + س - 3 = 0$ 6) $س^2 + 3\,س - 4 = 0$

7) $-س^2 + 3\,س + 4 = 0$ 8) $-س^2 + 3\,س + 4 = 0$

58. لتكن المعادلة من الدرجة الثانية

$س^2 - 7\,س - 4 = 0$ و $س'$ ، $س''$ حلاها

• أحسب ما يلي :

1) $س' + س''$ 2) $س' \cdot س''$ 3) $س'^2 + س''^2$

4) $\frac{1}{س'} + \frac{1}{س''}$ 5) $\frac{س''}{س'} + \frac{س'}{س''}$

• عيّن معادلة من الدرجة الثانية تقبل حلين هما : $\frac{1}{س'}$ ، $\frac{1}{س''}$

59. ادرس ، حسب قيم العدد الحقيقي ط ، إشارة حلول كل من المعادلات التالية

1) $س^2 - (ط + 3)\,س + ط - 4 = 0$

2) $(ط - 3)\,س^2 - 2\,ط\,س + ط + 2 = 0$

3) $ط^2\,س^2 + 5\,س - ط^2 = 0$

4) $(\text{ط} - 1)\,\text{س}^2 - (\text{ط} + 3)\,\text{س} + 2\,(1 - \text{ط}) = 0$

5) $(\text{ط} - 5)\,\text{س}^2 - 2\,(\text{ط} + 3)\,\text{س} + (\text{ط} + 1) = 0$

6) $\text{س}^2 + 2\,\text{ط}\,\text{س} + \text{ط}^2 + \text{ط} + 5 = 0$

7) $(\text{ط}^2 - 1)\,\text{س}^2 + (\text{ط} + 1)\,\text{س} + 5 = 0$

8) $(3\,\text{ط} - 7)\,\text{س}^2 + 2\,(\text{ط} - 1)\,\text{س} + 2 = 0$

جمل معادلات . جمل متراجحات :

60. عيّن مجموعة حلول كل معادلة من المعادلات التالية ذات المجهولين الحقيقيين س ، ع .

1) $2\,\text{س} + 3\,\text{ع} - 1 = 0$ 2) $\text{س}^2 + 3\,\text{ع} = 1$

3) $\text{س}^3 - \text{س}\,\text{ع} + 5 = 0$

واذكر ثلاثة حلول لكل منها

61. حل ، في $\text{ح} \times \text{ح}$ الجمل التالية :

1) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = 5 \\ \text{س} - \text{ع} = 7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \text{س} - 3\,\text{ع} = 5 \\ 2\,\text{س} + 6\,\text{ع} = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -\text{س} + 3\,\text{ع} = 1 \\ 2\,\text{س} - 6\,\text{ع} = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{2} + 3\,\text{ع} = -1 \\ -2\,\text{س} - 12\,\text{ع} = 4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\,\text{س} - 4\,\text{ع} + 4 = 0 \\ -\text{س} + 3\,\text{ع} - 2 = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2\,\text{س} + 2\,\text{ع} - 3 = 0 \\ -3\,\text{س} - \text{ع} + 1 = 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{2\,\text{س} - 1}{4} + 3\,\text{ع} = -1 \\ \dfrac{\text{س} + 4\,\text{ع}}{2} - \text{س} - \dfrac{1}{3} = 0 \end{cases}$

8) $$\begin{cases} \frac{س + 1}{2} - \frac{ع + 3}{4} - 1 = 0 \\ \frac{س - 1}{2} - \frac{ع - 1}{4} - 1 = 0 \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} س + (1 - \sqrt{3})ع + 1 + \sqrt{3} = 0 \\ (1 + \sqrt{3})س - 2ع + 4 + 2\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

62. أ) حل ، في ح×ح ، الجملة التالية :

$$\begin{cases} 5س + 2ع - 70 = 0 \\ 3ع - 5س - 55 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

ب) استعمل نتيجة السؤال السابق لحل الجملة التالية :

$$\begin{cases} 5س^2 + 2ع^2 = 70 \\ 3ع^2 - 5س^2 = 55 \end{cases} \quad (2)$$

63. نفس التمرين بالنسبة إلى الجملتين :

$$\begin{cases} س + ع - 8 = 0 \\ 3س + 5ع - 32 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (س - 3)^2 + (ع - 2)^2 = 8 \\ 3(س - 3)^2 + 5(ع - 2)^2 = 32 \end{cases} \quad (2)$$

64. نفس التمرين بالنسبة إلى الجملتين

$$(1)\quad \begin{cases} 15\text{س} + 12\text{ع} = 4 \\ 4\text{س} - 4\text{ع} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{15}{\text{س}} + \dfrac{12}{\text{ع}} - 4 = 0 \\ \dfrac{4}{\text{س}} - \dfrac{4}{\text{ع}} - \dfrac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

65. حل ، في ح×ح ، الجمل التالية :

$$1)\quad \begin{cases} \sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ع}} = 15 \\ \sqrt{\text{س}} - \sqrt{\text{ع}} = 7 \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{\text{س} - 2} + \dfrac{1}{\text{ع} - 1} - 5 = 0 \\ \dfrac{4}{\text{س} - 2} + \dfrac{1}{\text{ع} - 1} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$3)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{\text{س}} - \text{ع}^2 + 5 = 0 \\ \dfrac{1}{\text{س}} + 2\text{ع}^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} |\text{س}| + |\text{ع}| = 7 \\ 2|\text{س}| + |\text{ع}| = 11 \end{cases}$$

66. حل في ح × ح الجمل التالية :

1) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = 15 \\ 2|\text{س}| + \text{ع} = 10 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{س} - \text{ع} = 1 \\ 3|\text{س}| - 2|\text{ع}| = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{\text{س}}{\text{ع}} = \dfrac{6}{5} \\ 4\text{س} - 3\text{ع} = 3 \end{cases}$

67. حل في ح × ح الجمل التالية حيث س وَ ع هما المجهولين وَ ط وسيط حقيقي

1) $\begin{cases} \text{ع} = \text{ط}\,\text{س} - 1 \\ \text{س} - 2\text{ع} = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \text{س} - \text{ع} = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \text{س} + \text{ع} = \text{ط} - 1 \\ \dfrac{\text{س}}{\text{ع}} = 4 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (\text{ط} - 1)\text{س} + 2\text{ع} = 5 \\ 2\text{س} + (\text{ط} - 1)\text{ع} = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (\text{ط} - 1)\text{س} + 2\text{ع} = 1 \\ (\text{ط} - 1)\text{س} + \text{ط}\,\text{ع} = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (\text{ط}-4)\text{س}-2\text{ع}=3 \\ \text{س}-(\text{ط}-3)\text{ع}=\text{ط}-2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} (\text{ط}-1)\text{س}+(\text{ط}^2-1)\text{ع}=\text{ط}^3-1 \\ 2\text{س}+3\text{ع}=5 \end{cases}$

8) $\begin{cases} (\text{ط}-1)\text{س}+(\text{ط}-2)\text{ع}=3\text{ط}-1 \\ (\text{ط}^2-1)\text{س}+(\text{ط}^2-4)\text{ع}=5\text{ط}+1 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \text{ط}^2\text{س}+\text{ع}=0 \\ \text{س}+\text{ط}^2\text{ع}=0 \end{cases}$

10) $\begin{cases} (\text{ط}+1)\text{س}+(3\text{ط}-1)\text{ع}=0 \\ 2\text{س}+5\text{ع}=0 \end{cases}$

11) $\begin{cases} (\text{ط}-1)\text{س}+2\text{ط}\text{ع}=0 \\ \text{ط}\text{س}+(\text{ط}+6)\text{ع}=0 \end{cases}$

68. حل ، في ح×ح الجملتين

1) $\begin{cases} \dfrac{4}{\text{س}}+\dfrac{\text{ط}}{\text{ع}}=1 \\ \dfrac{\text{ط}}{\text{س}}+\dfrac{1}{\text{ع}}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{\text{س}+1}+\dfrac{\text{ط}}{\text{ع}-2}=0 \\ \dfrac{\text{ط}}{\text{س}+1}+\dfrac{4}{\text{ع}-2}=5 \end{cases}$

69. حل بيانيا المتراجحات التالية :

1) $2\text{س}-5\text{ع}+1 \leqslant 0$

2) $\text{س}+3\text{ع}-1 > 0$

3) $-2,5\text{س}+\dfrac{7}{6}\text{ع}-\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{3}\text{س}-\text{ع}+3$

70. حل بيانيا جمل المتراجحات التالية :

1) $\begin{cases} 5\text{س} - 2\text{ع} + 3 \geq 0 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} - 1 > 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -5\text{س} + 6\text{ع} + 2 > 0 \\ -\text{س} + \text{ع} > 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\text{س} - 4\text{ع} + 5 < 0 \\ 2\text{س} + 3\text{ع} - 1 > 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3\text{س} - 4\text{ع} + 5 < 0 \\ 1 < \text{ع} < 3{,}5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \text{س} - 2 \geq 0 \\ \text{س} + 3\text{ع} + 5 > 0 \\ 4\text{س} - 6\text{ع} + 1 < 0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} -\text{ع} + 3 < 0 \\ 2\text{س} - \text{ع} - 5 \leq 0 \\ 4\text{س} - 3 > 0 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4\text{س} + 15\text{ع} - 60 \leq 0 \\ 5 \leq 2\text{س} + \text{ع} \leq 8 \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3 \leq \text{س} - \text{ع} \leq 5 \\ 4|\text{س}| + 3|\text{ع}| \leq 12 \end{cases}$

71. حل بيانيا المتراجحات التالية :

1) $(\text{س} - 2)(\text{ع} + 3) > 0$

2) $(-3\text{س} + \text{ع})(4\text{س} + \text{ع} - 5) \leq 0$

3) $\text{س}^2 - 9\text{ع}^2 \geq 0$

4) $|\text{س}| + |\text{ع}| \leq 3$

تمارين متنوعة

72. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$(\text{ط} + 3)\,\text{س}^2 + 2\,(3\,\text{ط} + 1)\,\text{س} + \text{ط} + 3 = 0$$

عيّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلا مضاعفا .

أُحسب هذا الحل المضاعف .

73. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$2\,\text{س}^2 - (\text{ط} + 4)\,\text{س} + \text{ط} = 0$$

عيّن ط حتى يكون 3 حلاً لهذه المعادلة .

أُحسب الحل الآخر .

74. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$\text{ط}\,\text{س}^2 - 2\,(\text{ط} - 2)\,\text{س} + \text{ط} - 3 = 0 \qquad (1)$$

أ) عيّن مجموعة قيم ط حتي تقبل االمعادلة (1) حلولاً .

ب) عيّن ط حتى تقبل المعادلة (1) حلين س′ ، س″ يحققان المساواة : $4\,(\text{س}' + \text{س}'') = 7\,\text{س}' . \text{س}''$

75. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$\text{ط}\,\text{س}^2 + (\text{ط} - 4)\,\text{س} + 2\,\text{ط} = 0$$

عيّن ط حتى تقبل هذه المعادلة حلين س′ ، س″ بحيث يكون : $2\,(\text{س}'^2 + \text{س}''^2) = 5\,\text{س}' . \text{س}''$

76. نعتبر المعادلة التالية ذات المجهول الحقيقي س والوسيط الحقيقي ط :

$$\text{س}^2 - (2\,\text{ط} + 1)\,\text{س} + \frac{1}{4}\,(3\,\text{ط} - 1)\,(2\,\text{ط} - 1) = 0$$

1) أُدرس ، حسب قيم الوسيط ط ، وجود وَإشارة الحلين س′ ، س″ لهذه المعادلة

2) أُحسب ط و س″ إذا كان $\text{س}' = \frac{11}{2}$

3) عيّن ط حتى يكون : $\frac{1}{2س' - 3} + \frac{1}{2س'' - 3} = -\frac{2}{3}$ ،
أُحسب ، عندئذ ، س' و س'' .

77. ليكن العدد الحقيقي ط والتطبيق تا$_ط$ للمجموعة ح في نفسها المعرف كما يلي :

$$تا_ط (س) = (2 - ط) س^2 + (ط - 3) س + 2 ط - 5$$

1) عيّن المجموعة مح المعرفة كما يلي :

مح = { س ∈ ح : تا$_ط$ (س) ⩾ 0 }

2) عيّن ط حتى يكون العدد (+ 1) حلا للمعادلة تا$_ط$ (س) = 0 .
حل ، عندئذ ، هذه المعادلة

3) بيّن أن (− 1) حل للمعادلة تا$_ط$ (س) = 0 مهما كان العدد الحقيقي ط .
استنتج أنه ، مهما كان العدد الحقيقي ط يختلف عن 2 ، يمكن وضع تا$_ط$ (س)
على شكل جداء كثيري حدود من الدرجة الأولى .

4) ناقش ، حسب قيم ط ، عدد حلول المعادلة تا$_ط$ (س) = 0
أُحسب هذه الحلول بدلالة ط .

5) هل يمكن تعيين ط حتى تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0
حلين لهما نفس الإشارة ؟

6) لتكن الدالة ها$_ط$ للمجموعة ح في نفسها المعرفة كما يلي :

$$ها_ط (س) = \frac{- س^2 + س + 2}{تا_ط (س)}$$

أ) عيّن ، حسب قيم ط ، مجموعة التعريف ف$_ط$ للدالة ها$_ط$

ب) اختزل ها$_ط$ (س) . ثم حل المعادلة ها$_ط$ (س) = − 1

78. ليكن كثير الحدود تا$_ط$ (س) حيث :

$$تا_ط (س) = (ط^2 - 3 ط + 2) س^2 + (ط - 2) س + 3$$

عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى :

1) تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0 حلاً وحيداً

2) تقبل المعادلة تا$_ط$ (س) = 0 حلين متساويين

3) لا تقبل المتراجحة تا$_{ط}$ (س) > 0 حلا
4) يكون العددان تا$_{ط}$ (1) وَ تا$_{ط}$ (− 2) موجبين
5) يكون 3 حلاً للمعادلة تا$_{ط}$ (س) = 0
أُحسب ، عندئذ ، الحل الثاني .

79. تا$_{ط}$ (س) كثير حدود حيث :

تا$_{ط}$ (س) = (ط − 1) س^{2} − (ط + 3) س + 2 (ط − 3)

عيّن مجموعة قيم العدد الحقيقي ط حتى يقبل كثير الحدود تا$_{ط}$ (س) :
1) جذرين جداؤهما يساوي 1
2) جذرين متناظرين
3) جذرين من إشارتين مختلفتين .
4) جذرين موجبين

80. ا ، ب عددان حقيقيان وَ تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :

تا (س) = ا س + ب

1) عيّن ا ، ب بحيث يكون : تا (1) = 5 وَ تا (− 3) = 4
2) نفس السؤال من أجل :

• تا (0) = 1 وَ تا $\left(\frac{2}{3}\right)$ = 3

• تا $\left(\frac{1}{2}\right)$ = 4 وَ تا (− 1) = $\frac{3}{4}$

81. ا ، ب ، حـ أعداد حقيقية وَ تا تطبيق للمجموعة ح في نفسها معرف كما يلي :

تا (س) = ا س^{2} + ب س + حـ

1) عيّن ا ، ب ، حـ حتى يكون :

تا (0) = 3 وَ تا (− 1) = 0 وَ تا (4) = 1

2) نفس السؤال من أجل : تا (1) = 0 وَ تا (− 2) = 0 وَ تا (3) = $\frac{1}{2}$

82. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)
ا ، ب ، حـ ثلاث نقط إحداثياتها (3 ، 4) ؛ (3 ، – 3) ؛
(– 1 ، – 2) على الترتيب .
1) عيّن معادلات ديكارتية للمستقيمات (اب) ؛ (احـ) ؛ (ب حـ)
2) عيّن جملة متراجحات من الدرجة الأولى للمجهولين س ، ع مجموعة حلولها هي مجموعة الثنائيات (س ، ع) التي تكون من أجلها النقط ه (س ، ع) داخل المثلث اب حـ .

83. ط عدد حقيقي ، ($\Delta_{ط}$) و ($\Delta'_{ط}$) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :

$$(ط - 1) س - ع - ط = 0$$

$$2 ط س + 2 ع + 1 = 0$$

1) بيّن أنه من أجل ط = $-\frac{1}{2}$ يكون المستقيمان
($\Delta_{ط}$) و ($\Delta'_{ط}$) متوازيين تماماً
2) نفرض : ط $\neq -\frac{1}{2}$.
عيّن ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين ($\Delta_{ط}$) و ($\Delta'_{ط}$) .

84. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)
ط عدد حقيقي و ($\Delta_{ط}$) ، ($\Delta'_{ط}$) مستقيمان معادلتاهما على الترتيب :

$$2 س - ط ع + 3 = 0$$

$$ط س - 2 ع + 3 = 0$$

1) بيّن أنه من أجل ط = – 2 يكون المستقيمان
($\Delta_{ط}$) و ($\Delta'_{ط}$) متوازيين تماماً .
2) بيّن أنه من أجل ط = 2 يكون المستقيمان
($ط_{ط}$) وَ ($\Delta'_{ط}$) منطبقين .
3) نفرض ط $\neq$ – 2 وَ ط $\neq$ + 2
عين ، بدلالة ط ، إحداثيي نقطة تقاطع المستقيمين ($\Delta_{ط}$) و ($\Delta'_{ط}$) وبيّن أن هذه النقطة تنتمي إلى المستقيم الذي معادلته : س + ع = 0

85. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ى})$

1) حل ، في ح × ح ، الجملة :

$$\begin{cases} (ط - 1)\, س + 2ع = ط + 1 & (1) \\ ط\, س + 2\, ط\, ع = ط + 4 & (2) \end{cases}$$

حيث ط وسيط حقيقي .

2) عيّن قيم الوسيط ط حتى تكون المعادلتان (1) وَ (2) معادلتي مستقيمين $(\Delta_ط)$ و $(\Delta'_ط)$ على الترتيب .

أنشىء المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2)

بيّن أن جميع المستقيمات $(\Delta_ط)$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثييها .

3) عيّن العدد ط حتى يكون المستقيمان $(\Delta_ط)$ وَ $(\Delta'_ط)$ متوازيين وأنشئهما .

86. ★ عملية داخلية في مجموعة الأعداد الحقيقية ح معرفة كما يلي :

$$س ★ ع = س ع - 2 (س + ع) + 6$$

1) أثبت أنه يوجد ، في ح ، عنصر حيادي للعملية ★

2) عيّن مجموعة العناصر المتناظرة بالنسبة إلى العملية ★

3) أثبت أنه يوجد ، في ح ، عنصر ماص للعملية ★

87. نعتبر المعادلة التالية :

$$(ط + 2)\, س^2 + (ط - 3)\, س - 5\, ط = 0 \qquad (1)$$

حيث س هو المجهول وط وسيط حقيقي .

1) عيّن ، حسب قيم ط ، عدد حلول هذه المعادلة .

2) في حالة وجود حلين سَ و سً للمعادلة (1) ، نعتبر النقطتين هـَ و هـً اللتين فاصلتاهما سَ و سً على الترتيب ، في معلم $(م ، \vec{و})$

أ) عيّن ط حتى تكون النقطتان هـَ و هـً متناظرتين بالنسبة إلى النقطة أ ذات الفاصلة (-3) .

حدد ، عندئذ ، النقطتين هـَ و هـً .

ب) عيّن ط حتى تكون النقطتان هـَ و هـً مترافقتين توافقياً بالنسبة إلى النقطتين أ و ب اللتين فاصلتاهما (-3) و (-1) على الترتيب .

ح) بيّن أنه توجد ، بين حلّي المعادلة (1) ، علاقة مستقلة عن الوسيط ط .
استعمل هذه العلاقة لايجاد نقطتين ثابتتين ح ، ء يطلب تعيين فاصلتيهما بحيث يكون (ح ، ء ، هـ′ ، هـ″) تقسيماً توافقياً .

88. مستطيل محيطه 250 م . إذا أضفنا 20 م إلى طوله وَ أنقصنا 5 م من عرضه ، لا تتغير مساحته .
عين طول وعرض هذا المستطيل .

89. رتّب 42 كتاباً على صفٍّ طوله 1,50 م . سمك بعض الكتب 3 سم وسمك البعض الآخر 5 سم .
ما هو عدد كتب كل نوعٍ ؟

90. عيّن عددين طبيعيين الفرق بينهما 90 ونسبتهما $\frac{23}{5}$

91. عيّن عددين حقيقيين غير معدومين مجموع مقلوبيهما $\frac{5}{36}$ والفرق بين مقلوبيهما $\frac{1}{36}$.

92. عدد تلاميذ ثانوية مختلطة 1000 .
بعد أن غادر الثانوية 25 تلميذا و 30 تلميذة ، أصبح عدد البنين ضعف عدد البنات. ما هو عدد البنين وعدد البنات في هذه الثانوية ؟

93. عين عددين طبيعيين الفرق بينهما 6 وَ الفرق بين مربعيهما 216

94. عين مثلثاً قائماً طول وتره ب وَ الفرق بين طولي ضلعيه القائمين ط .
نفرض أن ب ثابت . عين قيم ط حتى يكون للمسألة حل .

95. عين ثلاثة أعداد طبيعية فردية متتابعة مجموعها 99 .
• نفس السؤال إذا كان المجموع هو 101 .

96. ما هو العدد الطبيعي الذي ينبغي إضافته إلى كل من حدّي كسر للحصول على كسر يساوي ضعف الكسر الأولى .

الباب السابع

حساب المثلثات

24 ـ الأقواس الموجهة
25 ـ حساب المثلثات
26 ـ المعادلات المثلثية الأساسية

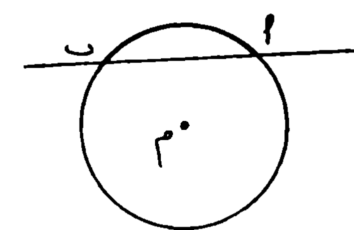
ان معظم المفاهيم الواردة في هذا الباب (مثل الراديان ، القوس الموجهة ،...) تعتبر جديدة بالنسبة للتلاميذ وتستحق اهتماما وعناية اكثر لتزويدهم بالعناصر الأساسية في حساب المثلثات .

24	الأقواس الموجهة

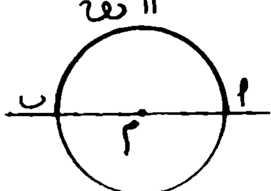
1. الأقواس الهندسية :

1.1 ـ القوس الهندسية :

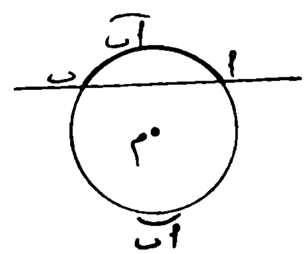
• تُعيّن نقطتان أ ، ب من الدائرة (ى) ذات المركز م ونصف القطر ى قوسين هندسيين وهما تقاطع الدائرة (ى) مع نصفي المستويين المغلقين اللذين حداهما المستقيم (أب)



• إذا كانت النقطتان أ ، ب متناظرتين بالنسبة إلى المركز م يكون لهاتين القوسين نفس الطول π ى (الشكل)



• إذا كانت النقطتان أ ، ب غير متناظرتين بالنسبة إلى المركز م تكون إحدى القوسين ذات طول أصغر من π ى ، نرمز إليها بالرمز $\overset{\frown}{أب}$ وتكون الأخرى ذات طول أكبر من π ى ، نرمز إليها بالرمز $\underset{\smile}{أب}$.
مجموع طولي هاتين القوسين يساوي 2 π ى وهو طول الدائرة (ى)



2.1 ـ قياس الأقواس الهندسية :

لقياس قوس دائرة تستخدم الواحدات التالية :

الدرجة ، الغراد ، الراديان .

• **الدرجة** :

الدرجة هي قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{360}$ من طول هذه الدائرة :

ترميز: 1^o

• **الغراد** :

الغراد هو قيس قوس دائرة طولها يساوي $\frac{1}{400}$ من طول هذه الدائرة:

ترميز: 1 غر

• **الراديان** :

الراديان هو قيس قوس دائرة طولها يساوي نصف قطر هذه الدائرة :

ترميز: 1 ر د

• قيس نصف دائرة حسب الواحدات السابقة هو :

180^o ؛ 200 غر ؛ π ر د .

• إذا كان قيس قوس حسب الواحدات السابقة هو α درجة ؛ β غراد ؛ γ راديان

يكون :

$$\frac{\gamma}{\pi} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{180}$$

يبيّن الجدول التالي التقابل بين أقياس بعض الأقواس

الدرجة	30	45	60	90
الغراد	$\frac{100}{3}$	50	$\frac{200}{3}$	100
الراديان	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

• طول قوس دائرة :

إذا كان ط طول قوس دائرة نصف قطرها ىہ وكان α قيسها بالراديان فإن :

$$ط = \alpha \text{ ىہ}$$

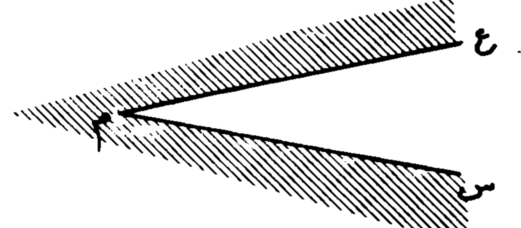
2. الزوايا الهندسية :

1.2 ـ الزاوية الهندسية :

يحدّد نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) قطاعين زاويين :

القطاع الزاوي الناتيء (الجزء غير المظلل في الشكل)

والقطاع الزاوي المنعكس (الجزء المظلل في الشكل)



الترميز :

الرمز [م س ، م ع] يُرمز به إلى القطاع الزاوي الناتيء (أو الزاوية الناتئة) الذي رأسه م وضلعاه [م س) و [م ع) .

• إذا تطابق نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية **المعدومة** .

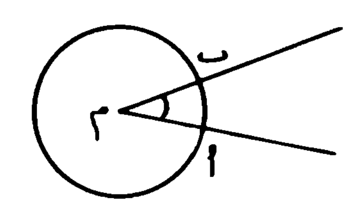
• إذا كان نصفا المستقيمين [م س) و [م ع) متعاكسين فإن الزاوية [م س ، م ع] تسمى الزاوية **المستقيمة** .

2.2 ـ الزاوية المركزية :

(ى ،) دائرة مركزها م .

ا و ب نقطتان من هذه الدائرة .

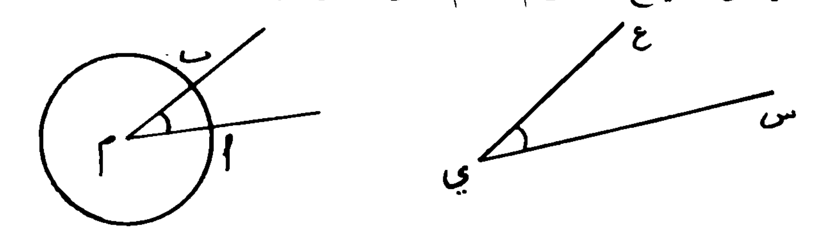
الزاوية [م ا ، م ب] ذات الرأس م والضلعين [م ا) ، [م ب) تسمى **زاوية مركزية** تحصر القوس $\overset{\frown}{\text{اب}}$.



3.2 ـ قياس زاوية هندسية :

(ى) دائرة ذات المركز م . [ي س ، ي ع] زاوية .

توجد نقطتان أ ، ب من هذه الدائرة بحيث تكون الزاويتان [ي س ، ي ع] و [م أ ، م ب] متقايستين .



(لهذا فإنه يمكن أخذ [م أ) و [م ب) موازيين ، على الترتيب ، لنصفي المستقيمين [ي س) و [ي ع) ومن نفس الجهة)

إن قيس الزاوية [ي س ، ي ع] هو قيس القوس الهندسية $\widehat{\text{أب}}$.

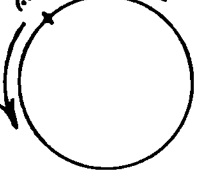
إذا أخترنا وحدة للقياس فإن الرمز $\widehat{\text{س ي ع}}$ يرمز به إلى قيس الزاوية [ي س ، ي ع] .

3. الدائرة الموجهة ، المستوي الموجه :

1.3 ـ الدائرة الموجهة :

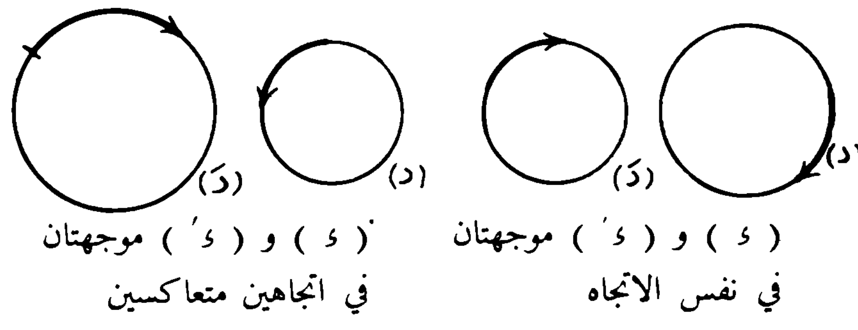
(ى) دائرة معطاة .

م نقطة متحركة على الدائرة (ى) ؛ يمكن لهذه النقطة أن تتحرك في إتجاهين ممكنين .



إن توجيه الدائرة (ى) يعني اختيار اتجاه للحركة من بين الاتجاهين الممكنين .

إذا كانت (ى) و (ى′) دائرتين موجهتين فإنه يمكن معرفة إن كانتا موجهتين في نفس الاتجاه أو في اتجاهين متعاكسين .



(ى) و (ى′) موجهتان في نفس الاتجاه

(ى) و (ى′) موجهتان في اتجاهين متعاكسين

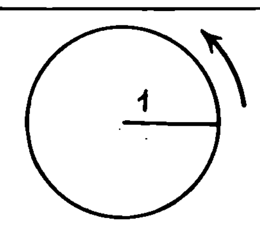
2.3 ـ المستوي الموجه :

إن توجيه المستوي يعني اختيار اتجاه واحد للحركة على جميع دوائر هذا المستوي .
يسمى هذا الاتجاهُ الاتجاه المباشر أو الموجب
والاتجاه الآخر يسمى الاتجاه غير المباشر أو السالب

إن الاتجاه المباشر الذي نختاره عادة هو الاتجاه المخالف لدوران عقارب الساعة .

3.3 ـ الدائرة المثلثية :

نسمي دائرة مثلثية كل دائرة موجهة نصف قطرها يساوي واحدة الأطوال .



4 ـ الأقواس الموجهة :

1.4 ـ تعريف :

إذا كانت أ و ب نقطتين من دائرة موجهة فإن الثنائية (أ ، ب) تعيّن قوساً موجهة .

نرمز إليها بالرمز $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

النقطة أ تسمى مبدأ القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

والنقطة ب تسمى نهاية القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$

2.4 ـ القيس الرئيسي لقوس موجهة :

نسمي قيساً رئيسياً ، مقدراً بالراديانات للقوس الموجهة $\overset{\frown}{\text{أب}}$ العدد الحقيقي θ المعرف كما يلي :

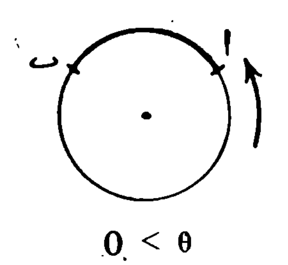
- إذا تطابقت النقطتان أ ، ب تكون القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ معدومة و $\theta = 0$
- إذا كانت النقطتان أ ، ب متناظرتين بالنسبة إلى مركز الدائرة يكون $\theta = \pi$
- إذا كانت النقطتان أ ، ب متمايزتين وغير متناظرتين بالنسبة إلى مركز الدائرة فإن :

1) القيمة المطلقة للعدد θ هي قيس القوس الهندسية $\overset{\frown}{\text{أب}}$ مقدرًا بالراديانات

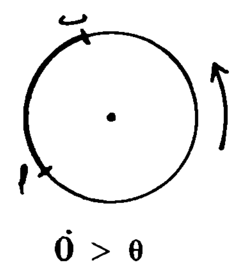
2) للحصول على إشارة θ نتصور نقطة م تتحرك على القوس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، منطلقة من النقطة أ ومستقرة عند ب .

إذا تحركت هذه النقطة في الاتجاه المباشر يكون العدد θ موجباً

وإذا تحركت م في الاتجاه غير المباشر يكون العدد θ سالباً .



$0 < \theta$



$0 > \theta$

مثال : القيس الرئيسي لربع دائرة موجهة يساوي :

إما $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ راديان و إما $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ راديان .

ملاحظة :

القيس الرئيسي لقوس موجهة ، مقدراً بالراديانات هو عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]-\pi , \pi]$.

3.4 ـ أقياس قوس موجهة :

(ى) دائرة في المستوي الموجه و $\overset{\frown}{اب}$ قوس موجهة من هذه الدائرة قيسها الرئيسي θ بالراديان .

لنتصور أن نقطة م تتحرك على الدائرة (ى) دوماً في الاتجاه نفسه ، منطلقة من ا وَ مستقرة عند ب .

يمكن ، بطبيعة الحال ، للنقطة م أن تمر بالنقطة ب عدة مرات .

لنميز حالتين : $\theta \geqslant 0$ و $\theta \leqslant 0$.

• **الحالة الأولى** : $\theta \geqslant 0$

ـ إذا تحركت م في الاتجاه الموجب وعملت ك دورة (ك $\in$ ص$_+$) ثم استقرت في النقطة ب ، نقول إنها قطعت ($\theta + 2\pi$ ك) راديانا في الاتجاه الموجب ونكتب :

قيس $\overset{\frown}{اب} = \theta + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص$_+$ (1)

ـ إذا تحركت م في الاتجاه السالب وعملت ك' دورة (ك' $\in$ ص$_+$) ثم استقرت في النقطة ب ، نقول إنها قطعت

$\left((2\pi - \theta) + 2\pi \text{ك}' \right)$ راديانا في الاتجاه السالب ونكتب :

قيس $\overset{\frown}{اب} = -(2\pi - \theta + 2\text{ك}'\pi)$

$= \theta + 2\pi(-\text{ك}' - 1)$

$= \theta + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص$_-$

(بوضع ك = - ك′ - 1)

أي قيس $\overset{\frown}{أب} = \theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص (2)

من (1) و (2) نستنتج أن

قيس $\overset{\frown}{أب} = \theta + 2\pi$ ك ، (ك ∋ ص)

• **الحالة الثانية** : $\theta \geqslant 0$

باتباع الطريقة السابقة نحصل على نفس النتيجة السابقة

قيس $\overset{\frown}{أب} = \theta + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

الخلاصة :

> إذا كانت واحدة القياس هي الراديان وكان θ القيس الرئيسي للقوس الموجهة $\overset{\frown}{أب}$ وكان θ' قيساً آخر للقوس $\overset{\frown}{أب}$
> فإن :
> $\theta' = \theta + 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

4.4 ـ خواص أقياس أقواس موجهة :

انطلاقاً من النتائج السابقة يمكن التأكد من الخواص التالية

الخاصة 1 :

> لكل قوس موجهة $\overset{\frown}{أب}$ ما لا نهاية من الأقياس .
> ليكن θ_1 قيسا للقوس $\overset{\frown}{أب}$.
> يكون θ_2 قيسا للقوس $\overset{\frown}{أب}$ إذا وفقط إذا كان
> $\theta_2 - \theta_1 = 2\pi$ ك (ك ∋ ص)

مثلا :

1) $\frac{3\pi}{2}$ و $\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$ قيسان لنفس القوس الموجهة لأن :

$$\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{13\pi}{2}\right) = 8\pi$$

و 8π من الشكل 2π ك (ك ∋ ص)

2) π وَ 4π قيسان لقوسين مختلفتين لأن :

$$4\pi - \pi = 3\pi$$

وَ 3π ليس من الشكل 2π ك (ك ∋ ص)

الخاصة 2 (علاقة شال)

إذا كانت أ ، ب ، حـ ثلاث نقط من دائرة موجهة (د)

فإن :

قيس $\overset{\frown}{أب}$ + قيس $\overset{\frown}{بحـ}$ = قيس $\overset{\frown}{أحـ}$ + 2π ك (ك ∋ ص)

من هذه الخاصة نستنتج أن :

قيس $\overset{\frown}{أب}$ = − قيس $\overset{\frown}{بأ}$ + 2π ك (ك ∋ ص)

مثال : إذا كان $\frac{\pi}{3}$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{أب}$ يكون $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{بأ}$

$\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ ليس القيس الوحيد للقوس $\overset{\frown}{بأ}$.

مثلاً $\frac{5\pi}{3}$ قيس آخر للقوس $\overset{\frown}{بأ}$ لأن $\frac{5\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi$

الخاصة 3

مهما كان العدد الحقيقي α ، ومهما كانت النقطة ا من الدائرة الموجهة (ى)
فإنه توجد نقطة وحيدة ب بحيث يكون α قيسا ، بالراديانات للقوس
الموجهة $\overset{\frown}{اب}$

تمرين محلول :

ا نقطة من دائرة موجهة (ى) . أوجد القيس الرئيسي لكل قوس من الأقواس التالية : $\overset{\frown}{اب}$ ، $\overset{\frown}{اب'}$ ، $\overset{\frown}{اب''}$ علما أن : قيس $\overset{\frown}{اب} = -75\pi$ ؛ قيس $\overset{\frown}{اب'} = \frac{123\pi}{4}$ ؛ قيس $\overset{\frown}{اب''} = \frac{65\pi}{3}$ ثم ارسم النقط ب ؛ ب' ؛ ب'' على هذه الدائرة

الحل :

لدينا : 1) $-75\pi = \pi + 2(-38\pi)$

القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{اب}$ هو π

2) القسمة الإقليدية للعدد 123 على 4 تعطي :

$$123 = 4 \times 30 + 3$$

ومنه $\frac{123\pi}{4} = \frac{(4 \times 30 + 3)\pi}{4}$

أي : $\frac{123\pi}{4} = 30\pi + \frac{3\pi}{4}$

$$= \frac{3\pi}{4} + 2(15)\pi$$

القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{اب'}$ هو $\frac{3\pi}{4}$

3) القسمة الإقليدية للعدد 65 على 3 تعطي

$$65 = 3 \times 21 + 2$$

ومنه : $\frac{65\pi}{3} = \frac{(3 \times 21 + 2)\pi}{3}$

أي : $\frac{65\pi}{3} = 21\pi + \frac{2\pi}{3}$

$\left(21\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$ ليس من الشكل $\theta + 2k\pi$ حيث

$\theta \in]-\pi , +\pi]$ و ك ∈ ص

لنكتبه على هذا الشكل :

$$21\pi + \frac{2\pi}{3} = 22\pi - \pi + \frac{2\pi}{3}$$

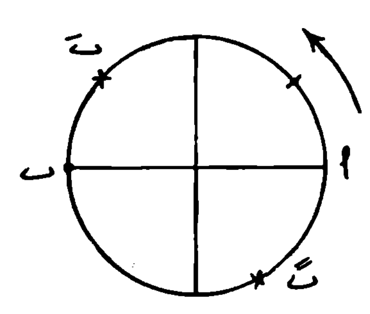
$$= 22\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi}{3} + 2(11)\pi$$

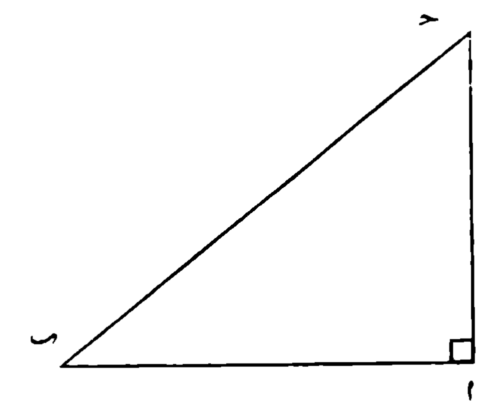
القيس الرئيسي للقوس أب″ هو $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

الأقياس الرئيسية السابقة تسمح لنا برسم النقط

ب ، ب′ ، ب″ (الشكل)



25 حساب المثلثات



1. التذكير بالمفاهيم المدروسة في حساب المثلثات

1.1. النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم

ابح مثلث قائم في ا

لدينا التعاريف التالية

$\text{تجب } \widehat{\text{ب}} = \frac{\text{اب}}{\text{بح}}$	$\text{جب } \widehat{\text{ب}} = \frac{\text{اح}}{\text{بح}}$
$\text{ظل } \widehat{\text{ب}} = \frac{\text{اح}}{\text{اب}}$	$\text{تظل } \widehat{\text{ب}} = \frac{\text{اب}}{\text{اح}}$

هذه التعاريف تسمح لنا بحساب :

- طول ضلع بمعرفة طول ضلع آخر وقيس زاوية حادة
- قيس زاوية بمعرفة طولي ضلعين

مثلا لدينا :

$$\text{اح} = \text{بح} \,.\, \text{جب } \widehat{\text{ب}}$$

$$\text{اح} = \text{اب} \,.\, \text{ظل } \widehat{\text{ب}}$$

$$\text{تجب } \widehat{\text{ح}} = \frac{\text{اح}}{\text{بح}}$$

ملاحظة :

من المساوايات $\widehat{ب}$ تجب $= \frac{أب}{ب حـ} =$ جب $\widehat{حـ}$ و $\widehat{ب} + \widehat{حـ} = 90°$

نستنتج جب $\widehat{حـ}$ = تجب ($90° - \widehat{حـ}$)

اذن : في مثلث قائم جيب زاوية حادة يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها

1 . 2 .النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

يبين الجدول التالي قيم النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

القيس بالدرجة	القيس بالراديان	الجيب	جيب التمام	الظل	ظل التمام
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

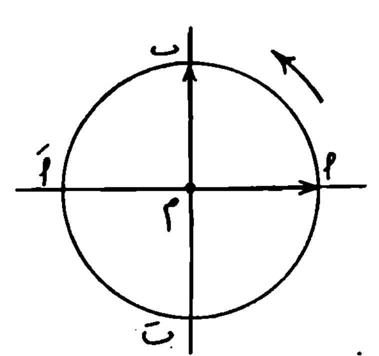
2. جيب تمام وجيب عدد حقيقي

2 . 1.الدائرة المثلثية المرفقة بمعلم

المستوى الموجه منسوب إلى معلم متعامد متجانس (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

> الدائرة الموجهة (ى) التي مركزها م ونصف قطرها 1 ، تسمى الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$)

نسمي فيما يلي أ ، أ′ ، ب ، ب′ النقط من الدائرة (ى) المعرفة كما يلي :

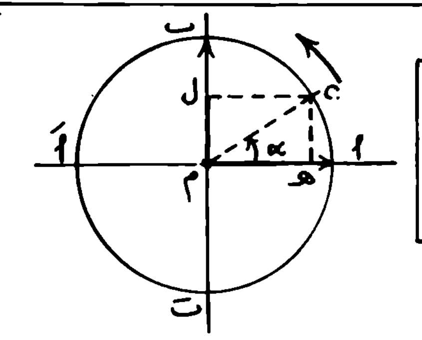


أ (1 ، 0) ؛ أ′ (−1 ، 0) ؛
ب (0 ، 1) ؛ ب′ (0 ، −1)

2.2 ـ جيب تمام وجيب عدد حقيقي :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ى تنتمي إلى الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا ، بالراديان ، للقوس $\overset{\frown}{\text{أى}}$

نسمي جيب تمام العدد الحقيقي α فاصلة النقطة ى ونرمز إليه بالرمز تجب α



نسمي جيب العدد الحقيقي α ترتيب النقطة ى ونرمز إليه بالرمز جب α

إذن :

إذا كان هـ المسقط العمودي للنقطة ى على (م أ)

وكان ل المسقط العمودي للنقطة ى على (م ب)

فإن :

$$\text{تجب } \alpha = \overline{\text{م هـ}} \quad ؛ \quad \text{جب } \alpha = \overline{\text{م ل}}$$

- يسمى محور الفواصل **محور جيوب التمام** ويسمى محورُ التراتيب **محورَ الجيوب** .

• نلاحظ أنه عندما تنتمي النقطة ﻫ إلى الدائرة المثلثية (ى) فإن النقطتين ﻫ و ل تنتميان ، على الترتيب ، إلى القطعتين [أ′ أ] و [ب′ ب] .

ومنه :

$$- 1 \leqslant \text{تجب } \alpha \leqslant 1 \quad \text{و} \quad - 1 \leqslant \text{جب } \alpha \leqslant 1$$

• نعلم أنه إذا كان α قيساً للقوس أﻫ فإن كل عدد من الشكل α + 2 π ك (ك ∈ ص) هو قيس للقوس أﻫ .

وبالتالي :

$$\text{تجب } (\alpha + 2\pi \text{ ك}) = \text{تجب } \alpha \quad (\text{ك} \in \text{ص})$$
$$\text{جب } (\alpha + 2\pi \text{ ك}) = \text{جب } \alpha \quad (\text{ك} \in \text{ص})$$

• من المساواة م ﻫ² + ﻫ ﻫ² = م ﻫ²

نستنتج : $\text{تجب}^2 \alpha + \text{جب}^2 \alpha = 1$

3 ـ ظل وظل تمام عدد حقيقي :

1.3 ـ ظل عدد حقيقي :

تعريف :

α عدد حقيقي بحيث تجب α ≠ 0 .

نسمي ظل العدد α النسبة $\frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$ ونرمز إليه بالرمز **ظل** α

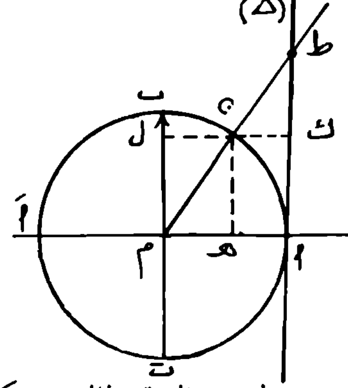
• التفسير الهندسي

نعلم أنه :

إذا كان α عدداً حقيقياً فإنه توجد نقطة وحيدة ﻫ من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس أﻫ .

نسمي : هـ المسقط العمودي للنقطة ن على (م أ)

و ل المسقط العمودي للنقطة ن على (م ب) و (Δ) المماس للدائرة (د) في النقطة أ .



إذا كان تجب $\alpha \neq 0$ فإن النقطة ن تختلف عن النقطتين ب و بَ والمستقيم (م ن) يقطع (Δ) في النقطة ط .

نسمي ك نقطة تقاطع المستقيمين (ل ن) و (Δ) .

من توازي المستقيمين (أ ط) و (هـ ن) وبتطبيق نظرية طاليس يكون

لدينا : $\frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م هـ}}} = \frac{\overline{\text{م ط}}}{\overline{\text{م ن}}}$ ...... (1)

كذلك من توازي المستقيمين (م أ) و (ك ن) وتطبيقاً لنظرية طاليس يكون لدينا :

$$\frac{\overline{\text{م ط}}}{\overline{\text{م ن}}} = \frac{\overline{\text{أ ط}}}{\overline{\text{أ ك}}} \quad .... (2)$$

من (1) و (2) نستنتج : $\frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م هـ}}} = \frac{\overline{\text{أ ط}}}{\overline{\text{أ ك}}}$

أي : $\overline{\text{أ ط}} = \frac{\overline{\text{م أ}}}{\overline{\text{م هـ}}} \times \overline{\text{أ ك}}$

أي : $\overline{\text{أ ط}} = \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تجب } \alpha}$

لأن : $\overline{\text{م أ}} = 1$ ؛ $\overline{\text{م هـ}} = \text{تجب } \alpha$ ؛ $\overline{\text{أ ك}} = \overline{\text{م ل}} = \text{جب } \alpha$

إذن : $\overline{أط}$ = ظل α

يسمى المحورُ (Δ ، $\overleftarrow{ى}$) **محورَ الظِّلاَل**

• **خاصة** :

من المساواة تجب^2 α + جب^2 α = 1

نستنتج : $\frac{\text{تجب}^2 \alpha + \text{جب}^2 \alpha}{\text{تجب}^2 \alpha} = \frac{1}{\text{تجب}^2 \alpha}$

أي : $1 + \text{ظل}^2 \alpha = \frac{1}{\text{تجب}^2 \alpha}$

2.3 ـ ظل تمام عدد حقيقي :

α عدد حقيقي بحيث جب α ≠ 0

نسمي ظل تمام العدد α النسبة $\frac{\text{تجب } \alpha}{\text{جب } \alpha}$ ونرمز إليه بالرمز **تظل** α

نلاحظ أنه إذا كان تجب α ≠ 0 و جب α ≠ 0 فإن :

$$\text{تظل } \alpha = \frac{1}{\text{ظل } \alpha}$$

3.3 ـ قيم تجب ، جب ، ظل ، تظل بعض الاعداد :

يبيّن الجدول التالي قيم جيب تمام ، جيب ، ظل ، وتظل الأعداد التالية

0 ؛ $\frac{\pi}{6}$ ؛ $\frac{\pi}{4}$ ؛ $\frac{\pi}{3}$ ؛ $\frac{\pi}{2}$.

العدد	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
جب α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
تجب α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
ظل α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف
تظل α	غير معرف	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4 ـ العلاقات بين جيوب . جيوب تمام وظلال عددين α و $\bar{\alpha}$ مجموعهما أو فرقهما : 0 أو π أو $\frac{\pi}{2}$

1.4 ـ $\boxed{\alpha - \bar{\alpha} = 0}$

لدينا $\bar{\alpha} = -\alpha$

لتكن هـ و هـ' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس أهـ⌢ ويكون $(-\alpha)$ قيسًا للقوس أهـ'⌢

تسمى القوسان أهـ⌢ و أهـ'⌢ قوسين متعاكستين.

بما أن النقطتين هـ و هـ' متناظرتان بالنسبة إلى (أأ') فلهما نفس الفاصلة وترتيباهما متعاكسان .

ومنه :

تجب ($-\alpha$) = تجب α
جب ($-\alpha$) = $-$ جب α
ظل ($-\alpha$) = $-$ ظل α

2.4 ـ $\boxed{\alpha + \alpha' = \pi}$:

لدينا : $\alpha' = \pi - \alpha$

لتكن د و د' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أد}$ ويكون ($\pi - \alpha$) قيسا للقوس $\overset{\frown}{أد'}$.

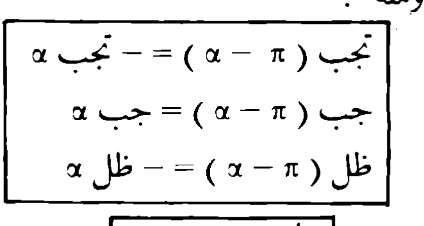
تسمى القوسان $\overset{\frown}{أد}$ و $\overset{\frown}{أد'}$ قوسين متكاملتين.

النقطتان د و د' متناظرتان بالنسبة إلى (ب ب') .

فلهما فاصلتان متعاكستان ولهما نفس الترتيب .



ومنه :



تجب ($\pi - \alpha$) = $-$ تجب α
جب ($\pi - \alpha$) = جب α
ظل ($\pi - \alpha$) = $-$ ظل α

3.4 ـ $\boxed{\alpha' - \alpha = \pi}$:

لدينا $\alpha' = \alpha + \pi$

لتكن د و د' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أد}$ ويكون ($\alpha + \pi$) قيسا للقوس $\overset{\frown}{أد'}$.

النقطتان د و د' متناظرتان بالنسبة إلى المركز م .

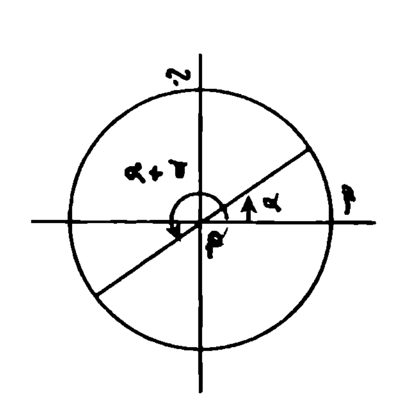
فلهما فاصلتان متعاكستان وترتيبان متعاكسان


ومنه

جب $(\pi+\alpha)$ = − جب α

تجب $(\pi+\alpha)$ = − تجب α

ظل $(\pi+\alpha)$ = ظل α



4.4 ـ

$$\alpha + \alpha' = \frac{\pi}{2}$$

لدينا $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha$

لتكن هـ وَ هـ' النقطتين من الدائرة المثلثية (ى)

بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أهـ}$ وَ $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ قيسا للقوس $\overset{\frown}{أهـ'}$

تسمى القوسان $\overset{\frown}{أهـ}$ وَ $\overset{\frown}{أهـ'}$ قوسين متتامتين

لقد رأينا انه إذا كانت لدينا زاويتان متتامتان في مثلث قائم فإن جيب قيس احداهما يساوي جيب تمام قيس الآخر

ويمكن تعميم هذه النتيجة على قوسين متتامتين

جب $\overline{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ = تجب α

تجب $\overline{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ = جب α

ظل $\overline{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ = تظل α

5.4 - $\alpha' - \alpha = \frac{\pi}{2}$

لدينا $\alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$

بتطبيق النتائج السابقة يمكن ان نكتب

- تجب $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = تجب $\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$

  = جب $(-\alpha)$ = − جب α

- جب $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = جب $\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$

  = تجب $(-\alpha)$ = تجب α

- ظل $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = ظل $\left(\frac{\pi}{2} - (-\alpha)\right)$

  = تظل $(-\alpha)$ = − تظل α

تجب $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = − جب α

جب $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = تجب α

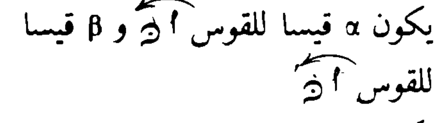
ظل $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ = − تظل α

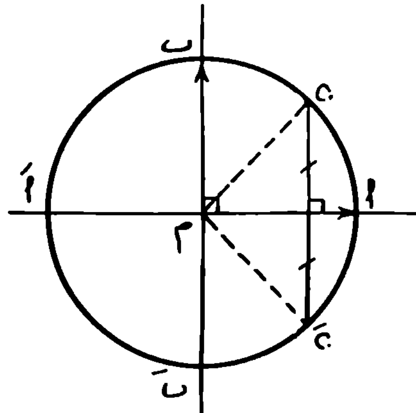
26 المعادلات المثلثية الأساسية

1 ـ المعادلات من الشكل تجب س = تجب α

1.1 ـ الأعداد التي لها نفس جيب التمام :

• α و β عددان حقيقيان و ن ، ن′ نقطتان من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس أن⌢ و β قيسا للقوس أن′⌢





يكون للعددين α و β نفس جيب التمام إذا وفقط إذا كانت للنقطتين ن و ن′ نفس الفاصلة وهذا يعني أن النقطتين ن و ن′ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى (م أ)

ومنه النتيجة :

تجب α = تجب β ⟺ (α = β + 2π ك ؛ ك ∋ ص
أو
α = − β + 2π ك ؛ ك ∋ ص)

2.1 ـ حل المعادلة تجب س = تجب α :

نعتبر المعادلة تجب س = تجب α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة :

تجب س = تجب α

تجب س = تجب α ⟺	(س = α + 2π ك ، ك ∋ ص أو س = − α + 2π ك . ك ∋ ص)

أمثلة :

1) حلول المعادلة تجب س = تجب $\frac{\pi}{3}$ هي الأعداد الحقيقية س

حيث :

س = $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

أو

س = $-\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

2) لنعتبر المعادلة ذات المجهول س :

تجب 2 س = تجب $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$ (م)

لدينا :

(م) ⇔

2 س = س + $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص (1)

أو

2 س = $-\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi$ ك . ك ∈ ص (2)

(1) ⇔ س = $\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

(2) ⇔ 3 س = $-\frac{\pi}{4} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

(2) ⇔ س = $-\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\text{ك}}{3}$. ك ∈ ص

حلول المعادلة (م) هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} س = \frac{\pi}{4} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = -\frac{\pi}{12} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

3) لنعتبر المعادلة ذات المجهول س :

$$تجب\left(س - \frac{\pi}{3}\right) = تجب\left(س + \frac{\pi}{6}\right) \quad (م')$$

لدينا :

$$(م') \Longleftrightarrow \begin{cases} س - \frac{\pi}{3} = س + \frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \quad (3) \\ \text{أو} \\ س - \frac{\pi}{3} = -\left(س + \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \quad (4) \end{cases}$$

المعادلة (3) ليس لها حلّ

$$(4) \Longleftrightarrow 2س = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص$$

$$\Longleftrightarrow س = \frac{\pi}{12} + \pi ك \text{ ، } ك \in ص$$

إذن حلول المعادلة (م') هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$س = \frac{\pi}{12} + \pi ك \text{ ، } ك \in ص$$

3.1 ـ حل المعادلة تجب س = ط :

ط عدد حقيقي و (ى) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم (م ، م أ⃖ ، م ب⃖)
الأعداد الحقيقية س التي تحقق تجب س = ط هي أقياس الأقواس أ⌒ن
بحيث تكون فاصلة ن هي ط

- إذا كان ط ∉ [− 1 ، 1] لا يوجد حل للمعادلة تجب س = ط
- إذا كان ط ∈ [− 1 ، 1] توجد على الأقل نقطة ن من الدائرة (ى) فاصلتها ط

إذا كان α قيساً للقوس أ⌒ن فإن حل المعادلة تجب س = ط يؤول إلى حل المعادلة تجب س = تجب α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة تجب س = $\frac{1}{2}$

نعلم أن تجب $\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

حلول المعادلة تجب س = $\frac{1}{2}$ هي حلول المعادلة

تجب س = تجب $\frac{\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

(س = $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك ، ك ∈ ص)

أو

(س = $-\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك ك ∈ ص)

2) نعتبر المعادلة $1 + 2$ تجب س $= 0$

لدينا $1 + 2$ تجب س $- 0 \Leftrightarrow$ تجب س $= -\frac{1}{2}$

نعلم أن تجب $\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ لأن :

تجب $\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -$ تجب $\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

حلول المعادلة $1 + 2$ تجب س $= 0$ هي حلول المعادلة

تجب س = تجب $\frac{2\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث :

س $= \frac{2\pi}{3} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

أو

س $= -\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

3) نعتبر المعادلة تجب س $= 1$

نعلم أن تجب $0 \quad 1$

تجب س $= 1 \Leftrightarrow$ تجب س = تجب 0

$\Leftrightarrow$ س $= 0 + 2\pi$ ك . ك ∈ ص

أو

س $= 0 - 2\pi$ ك . ك ∈ ص

$\Leftrightarrow$ س $-\ 2\pi$ ك . ك ∈ ص

حلول المعادلة تجب س $\ 1$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

س $= 2\pi$ ك . ك ∈ ص

4) نعتبر المعادلة تجب س = − 1

نعلم أن تجب π = − 1

تجب س = − 1 ⟺ تجب س = تجب π

⟺ س = π + 2 π ك . ك ∋ ص
أو
س = − π + 2 π ك . ك ∋ ص

⟺ س = (2 ك + 1) π . ك ∋ ص
أو
س = (2 ك − 1) π . ك ∋ ص

العددان الصحيحان (2 ك − 1) و (2 ك + 1) فرديان وكيفيان يمكن كتابتهما على شكل موحّد (2 ك′ + 1) . ك′ ∋ ص

إذن :

حلول المعادلة تجب س = − 1 هي الأعداد الحقيقية س حيث س = (2 ك′ + 1) π . ك′ ∋ ص

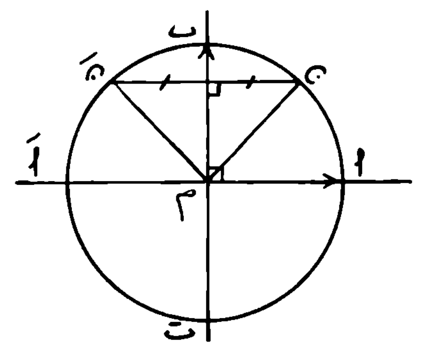
2 ـ المعادلات من الشكل جب س = جب α :

1.2 ـ الأعداد التي لها نفس الجيب :

α و β عددان حقيقيان ، ه و ه′ نقطتان من الدائرة المثلثية (ى) المرفقة بالمعلم (م ، م $\overleftarrow{أ}$. م $\overleftarrow{ب}$)

بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أه}$ و β قيسا للقوس $\overset{\frown}{أه'}$

يكون للعددين α و β نفس الجيب إذا وفقط إذا كان للنقطتين ه و ه′ نفس الترتيب وهذا يعني أن النقطتين ه و ه′ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى (م ب) .



ومنه النتيجة :

$$\text{جب}\,\alpha = \text{جب}\,\beta \iff \begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \alpha = \pi - \beta + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

2.2 ـ حل المعادلة جب س = جب α :

نعتبر المعادلة جب س = جب α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى. النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة جب س = جب α

$$\boxed{\text{جب س} = \text{جب}\,\alpha \iff \begin{cases} \text{س} = \alpha + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \pi - \alpha + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}}$$

أمثلة :

1) حلول المعادلة جب س = جب $\frac{\pi}{6}$ هي الأعداد الحقيقية س حيث :

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ ، } \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

أي

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ ؛ } \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\,\text{ك} \text{ . } \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

2) نعتبر المعادلة جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)$ (م)

لدينا :

$$(\text{م}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\text{س} = \frac{\pi}{4} - \text{س} + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ 2\text{س} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right) + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\text{س} = \frac{\pi}{4} + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\text{ك}}{3} \text{، ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{4} - \text{س}\right)$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi\text{ك}}{3} \text{، ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi\text{ك} \text{، ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

3) نعتبر المعادلة 2 جب^{2} س $- 7$ جب س $+ 3 = 0$ (1)

نضع جب س = ع ونحل الجملة

$$\begin{cases} \text{ع} = \text{جب س} \\ \text{و} \\ 2\text{ع}^{2} - 7\text{ع} + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

للمعادلة (2) حلان 3 و $\frac{1}{2}$

من أجل ع = 3 نحصل على المعادلة جب س = 3 التي ليس لها حل ومن

أجل ع = $\frac{1}{2}$ نحصل على المعادلة جب س = $\frac{1}{2}$ والتي حلولها هي الأعداد

الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\text{ك} ،\ \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\text{ك} ،\ \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

إذن حلول المعادلة (1) هي الأعداد الحقيقية س حيث:

$$\begin{cases} \text{س} = \frac{\pi}{6} + 2\pi\text{ك} ،\ \text{ك} \in \text{ص} \\ \text{أو} \\ \text{س} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi\text{ك} ،\ \text{ك} \in \text{ص} \end{cases}$$

3.2 ـ حل المعادلة جب س = ط :

ط عدد حقيقي و (ى) الدائرة المثلثية

الأعداد الحقيقية س التي تحقق جب س = ط هي أقياس الأقواس $\overset{\frown}{\text{أ ﻫ}}$

بحيث يكون ترتيب ﻫ هو ط

- إذا كان ط $\notin$ [− 1 ، 1] لا يوجد حل للمعادلة جب س = ط
- إذا كان ط $\in$ [− 1 ، 1] توجد على الأقل نقطة ﻫ من الدائرة (ى) ترتيبها ط

إذا كان α قيسا للقوس $\overset{\frown}{\text{أ ﻫ}}$ فإن حل المعادلة جب س = ط يؤول إلى حل المعادلة جب س = جب α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة جب س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

نعلم أن جب $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حلول المعادلة جب س = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي حلول المعادلة

جب س = جب $\frac{\pi}{3}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك ، ك $\in$ ص

أو

س = $\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi$ ك . ك $\in$ ص

أي :

$$\begin{cases} س = \frac{\pi}{3} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{2\pi}{3} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

2) نعتبر المعادلة $1 + 2$ جب س $= 0$

لدينا $1 + 2$ جب س $= 0 \Leftrightarrow$ جب س $= -\frac{1}{2}$

نعلم أن جب $\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

حلول المعادلة $1 + 2$ جب س $= 0$ هي حلول المعادلة

جب س = جب $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\begin{cases} س = -\frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

أي :

$$\begin{cases} س = -\frac{\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \\ \text{أو} \\ س = \frac{7\pi}{6} + 2\pi ك \text{ ، } ك \in ص \end{cases}$$

3) نعتبر المعادلة جب س = 1

نعلم أن جب $\frac{\pi}{2}$ = 1

جب س = 1 $\Leftrightarrow$ جب س = جب $\frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow$
س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

أو

س = $\pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

$\Leftrightarrow$
س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

أو

س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

$\Leftrightarrow$ س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

حلول المعادلة جب س = 1 هي الأعداد الحقيقية

س حيث س = $\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

4) نعتبر المعادلة جب س = − 1   (1)

نعلم أن جب $\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

(1) ⟺ جب س = جب $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

⟺
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص
أو
س = $\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi$ ك ، ك ∋ ص

⟺
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك (ك ∋ ص)
أو
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$(ك + 1)   (ك ∋ ص)

⟺
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك (ك ∋ ص)
أو
س = $-\frac{\pi}{2} + 2\pi$ك′ (ك′ ∋ ص)

بوضع ك + 1 = ك′

إذن :

حلول المعادلة جب س = − 1 هي الأعداد الحقيقية س حيث :

$$س = -\frac{\pi}{2} + 2\pi ك \quad (ك \in ص)$$

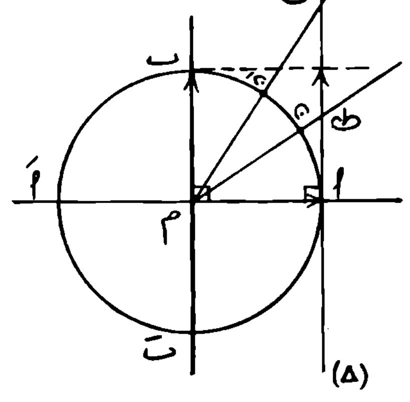
5) نعتبر المعادلة جب س = $\sqrt{2}$

لدينا $\sqrt{2} > 1$

إذن ليس للمعادلة جب س = $\sqrt{2}$ حل

3 ـ المعادلات من الشكل ظل س = ظل α

1.3 ـ الأعداد التي لها نفس الظل :



α و β عددان حقيقيان ، ن و ن′ النقطتان من الدائرة المثلثية (ى) بحيث يكون α قيسا للقوس $\overset{\frown}{أن}$ و β قيسا للقوس $\overset{\frown}{أن'}$

نسمي ط نقطة تقاطع المستقيمين (م ن) و (Δ) ، و ط′ نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (م ن′)

يكون للعددين α و β نفس الظل إذا وفقط إذا كانت النقطتان ط و ط′ متطابقتين وهذا يعني أن النقطتين ن و ن′ متطابقتان أو متناظرتان بالنسبة إلى النقطة م

فعندما تكون ن وَ ن′ متطابقتين

يكون $\alpha = \beta + 2\pi ك$ ، ك $\in$ ص (1)

وعندما تكون ن و ن′ متناظرتين بالنسبة إلى م

يكون $\alpha = \beta + \pi + 2\pi ك$ ، ك $\in$ ص

$= \beta + (2ك + 1)\pi$. ك $\in$ ص (2)

يمكن كتابة (1) و (2) على الشكل الموحد

$\alpha = \beta + $ كَ$'\ \pi$ ، كَ$'$ ∈ ص

لأن :

من أجل قيم كَ$'$ الزوجية نحصل على (1) ومن أجل قيم كَ$'$ الفردية نحصل على (2)

ومنه النتيجة :

ظل α = **ظل** $\beta \Longleftrightarrow \alpha = \beta +$ **ك** π ، **ك** ∈ ص

2.3 ـ حل المعادلة ظل س = ظل α

نعتبر المعادلة ظل س = ظل α حيث س هو المجهول الحقيقي و α عدد حقيقي معطى :

النتيجة المحصل عليها في الفقرة السابقة تسمح بحل المعادلة ظل س = ظل α

ظل س = ظل $\alpha \Longleftrightarrow$ س = α + ك π ، ك ∈ ص

أمثلة :

1) حلول المعادلة ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ هي الأعداد الحقيقية س .

حيث س = $\frac{\pi}{4}$ + ك π ، ك ∈ ص

2) نعتبر المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\right.$ س$\left.\right)$ (م)

لدينا :

(م) $\Longleftrightarrow$ 3 س = $\frac{\pi}{3} - 2$ س + ك π ، ك ∈ ص

$\Longleftrightarrow$ 5 س = $\frac{\pi}{3}$ + ك π ، ك ∈ ص

$\Longleftrightarrow$ س = $\frac{\pi}{15} + \frac{\text{ك}\,\pi}{5}$. ك ∈ ص

إذن حلول المعادلة ظل 3 س = ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\right)$ س)

هي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{15} + \frac{ك\pi}{5}$. ك ∈ ص

3.3 ـ حل المعادلة ظل س = ط

مهما يكن العدد الحقيقي ط يوجد ، على الأقل ، عدد حقيقي α بحيث يكون ظل α = ط

وحل المعادلة ظل س = ط يؤول إلى حل المعادلة ظل س = ظل α

أمثلة :

1) نعتبر المعادلة ظل س = 1

نعلم أن ظل $\frac{\pi}{4}$ = 1

حلول المعادلة ظل س = 1 هي حلول المعادلة

ظل س = ظل $\frac{\pi}{4}$ وهي الأعداد الحقيقية س حيث

س = $\frac{\pi}{4}$ + ك π . ك ∈ ص

2) نعتبر المعادلة ظل $\frac{س}{2}$ = $\sqrt{3}$

نعلم أن ظل $\frac{\pi}{3}$ = $\sqrt{3}$

$$\text{ظل}\ \frac{\text{س}}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \text{ظل}\ \frac{\text{س}}{2} = \text{ظل}\ \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{س}}{2} = \frac{\pi}{3} + \pi\ \text{ك}\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\ \text{ك}\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

حلول المعادلة ظل $\frac{\text{س}}{2} = \sqrt{3}$ هي الأعداد الحقيقية س حيث

$$\text{س} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\ \text{ك}\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

3) نعتبر المعادلة ظل 2 س = تظل س

نعلم أن تظل س = ظل $\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$

$$\text{ظل}\ 2\ \text{س} = \text{تظل س} \Leftrightarrow \text{ظل}\ 2\ \text{س} = \text{ظل}\left(\frac{\pi}{2} - \text{س}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\ \text{س} = \frac{\pi}{2} - \text{س} + \text{ك}\ \pi\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow 3\ \text{س} = \frac{\pi}{2} + \text{ك}\ \pi\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

$$\Leftrightarrow \text{س} = \frac{\pi}{6} + \frac{\text{ك}\ \pi}{3}\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$$

حلول المعادلة ظل 2 س = تظل س هي الأعداد الحقيقية س

حيث : $\text{س} = \frac{\pi}{6} + \frac{\text{ك}\ \pi}{3}\ ،\ \text{ك} \in \text{ص}$

تمــارين

الزوايا الهندسية :

1. الأقياس α ، β ، γ لزوايا مثلث متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 2 ، 3 .
   1) أحسب هذه الأقياس بالدرجات وبالغرادات وبالراديانات
   2) ما هي طبيعة هذا المثلث ؟

2. نفس الأسئلة إذا كانت α ، β ، γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 1 ، 2 .

3. نفس الأسئلة إذا كانت α ، β ، γ متناسبة ، على الترتيب ، مع الأعداد 1 ، 2 ، 2 .

4. أحسب ، بالراديانات ، ثم بالغرادات ، أقياس الزوايا التي أقياسها : $10°$ ؛ $18°$ ؛ $53°$ ؛ $1°$ ؛ $135°$ ؛ $200°$.

5. أحسب ، بالدرجات ، ثم بالغرادات ، أقياس الزوايا التي أقياسها :
   $\frac{\pi}{5}$ ر د ؛ $\frac{2\pi}{5}$ ر د ؛ $\frac{3\pi}{5}$ ر د ؛ $\frac{5\pi}{4}$ ر د ؛ $\frac{3\pi}{8}$ ر د .

6. 1) عبّر ، بالدرجات وبالغرادات ، عن الأقياس :
   $\frac{\pi}{20}$ ر د ؛ $\frac{7\pi}{6}$ ر د ؛ $\frac{13\pi}{5}$ ر د ؛ 0.3 ر د ؛ 15.8 ر د .
   2) حوّل إلى الدرجات والراديانات الأقياس :
   150 غر ؛ 25 غر ؛ 47,8 غر ؛ 1230 غر
   3) حوّل إلى الراديانات والغرادات الأقياس :
   $36°$ ؛ $345°$ ؛ $15°$ ؛ $702°$

7. أُحسب . بالراديانات وبالغرادات وبالدرجات الزاوية المحصورة بين عقربي ساعة عندما تشير هذه الساعة إلى :

- الساعة 12 و 30 د
- الساعة 1 و 20 د
- الساعة 2 و 55 د

8. ا ب حـ مثلث حيث : $\widehat{ب ا حـ} = 35^\circ$ و $\widehat{ا ب حـ} = 80^\circ$.
أُحسب $\widehat{ب حـ ا}$ وقيس زاوية المنصفين للزاويتين [ب ا ، ب حـ] و [حـ ا ، حـ ب]

9. ا ب حـ مثلث . هـ نقطة تقاطع أعمدته .
أُحسب $\widehat{ب هـ حـ}$ بدلالة $\widehat{ب ا حـ}$.

10. قيس قوس دائرة هو 50° وطول هذه القوس 3π سم .
ما هو نصف قطر هذه الدائرة ؟

11. دائرة (ى) نصف قطرها 2 سم . ا و ب نقطتان من (ى) .
إذا كان طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ يساوي 1 سم ، ما هو طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ ؟

12. دائرة (ى) طولها 24 سم . ا و ب نقطتان من (ى) حيث طول القوس $\overset{\frown}{ا ب}$ يساوي 9 سم .
ما هو قيس هذه القوس بالراديانات وبالدرجات ؟

13. لولب خطوته 2 مم (أي عندما يدور هذا اللولب دورة كاملة . ينغرز بعمق قدره 2 مم) .
1) بكم ينغرز هذا اللولب إذا دار بزاوية قدرها 63900° ؟
2) ما هي الزاوية التي يدورها هذا اللولب إذا انغرز بعمق قدره 23 مم ؟

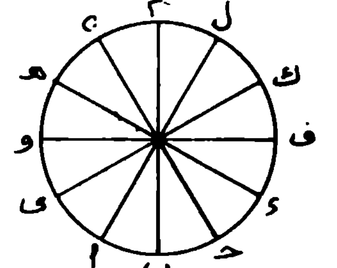
الأقواس الموجهة :

14. ا ب حـ مثلث متقايس الأضلاع و (ى) دائرة موجهة محيطة به . الاتجاه الموجب على (ى) هو الاتجاه من ا نحو ب .
عيّن قيسا مقدراً بالراديانات لكل من القوسين $\overset{\frown}{ا ب}$ و $\overset{\frown}{ا حـ}$.

15. أ ب ج د مربع و (ى) دائرة موجهة محيطة به.
الاتجاه السالب على (ى) هو الاتجاه من أ نحو ب.
عيّن قيساً مقدراً بالراديانات لكل واحدة من الأقواس $\overset{\frown}{\text{أب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{أج}}$ ، $\overset{\frown}{\text{أد}}$.

16. (ى) دائرة موجهة و ن نقطة من (ى).
عيّن النقط أ . ب . ج . ك . ل . م . ه من الدائرة (ى) بحيث تكون الأعداد $-\frac{\pi}{2}$. $\frac{3\pi}{4}$. π . $\frac{3\pi}{2}$. $\frac{\pi}{3}$. $-\frac{3\pi}{4}$. $-\frac{\pi}{4}$ أقياسا . على الترتيب . للأقواس $\overset{\frown}{\text{ن أ}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ب}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ج}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ك}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ل}}$. $\overset{\frown}{\text{ن م}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ه}}$.
ما هي النقط المتقابلة قطرياً ؟

17. أ ب ج د ف ك ل م ن ه و ى مضلع منتظم و (ى) دائرة موجهة محيطة به (الشكل).



عيّن قيسا مقدراً بالراديانات لكل قوس من الأقواس التالية : $\overset{\frown}{\text{أد}}$. $\overset{\frown}{\text{أك}}$. $\overset{\frown}{\text{بن}}$. $\overset{\frown}{\text{ده}}$. $\overset{\frown}{\text{ن ه}}$. $\overset{\frown}{\text{كب}}$.

18. عيّن الأقياس الرئيسية الأقواس الموجهة التي أقياسها هي : 637π رد ؛ $-\frac{239\pi}{6}$ رد ؛ $-\frac{227\pi}{7}$ رد ؛ $1650°$ ؛ $-4857°$

19. عيّن الأقياس الرئيسية للأقواس الموجهة التي أقياسها هي : $\frac{15\pi}{2}$ رد ؛ $\frac{172\pi}{3}$ رد ؛ $-\frac{57\pi}{4}$ رد ؛ 128π رد ؛ $\frac{4\pi}{3}$ رد ؛ 125π رد ؛ $-\frac{2\pi}{3}$ رد ؛ $-\frac{11\pi}{6}$ رد ؛ $\frac{5\pi}{2}$ رد ؛ $10^5\pi$ رد ؛ $-\frac{5\pi}{6}$ رد ؛ $-\frac{28\pi}{3}$ رد ؛ $\frac{167\pi}{5}$ رد ؛ $\frac{110\pi}{4}$ رد .

20. القيس الرئيسي لقوس موجهة هو 2 ر د .

1) أثبت أنه يوجد قيس وحيد α لهذه القوس حيث
$\alpha \in]49 \ ; \ 49 + 2\pi]$

2) أثبت أنه يوجد قيس وحيد β لهذه القوس حيث
$\beta \in [-39 \ ; \ -39 + 2\pi[$

21. أ ، ب ، ح ثلاث نقط من دائرة موجهة ؛ α و β قيسان للقوسين $\overset{\frown}{\text{أب}}$ و $\overset{\frown}{\text{بح}}$ على الترتيب .

عيّن قيس القوس $\overset{\frown}{\text{أح}}$ الذي ينتمي إلى المجال $[0 \ ، \ 2\pi[$ في كل حالة من الحالات التالية :

$$\alpha = \frac{4\pi}{3} \quad \text{و} \quad \beta = -\frac{5\pi}{6}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\alpha = -\frac{2\pi}{3} \quad \text{و} \quad \beta = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{50\pi}{3} \quad \text{و} \quad \beta = \frac{7\pi}{4}$$

22. (د) دائرة موجهة نصف قطرها 4 سم .

أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (د) بحيث يكون العددان $\frac{2\pi}{3}$ و $\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ قيسين ، على الترتيب ، للقوسين $\overset{\frown}{\text{أب}}$ و $\overset{\frown}{\text{أح}}$.

1) عيّن القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{\text{بح}}$.

2) أُحسب طولي القوسين $\overset{\frown}{\text{بح}}$ و $\overset{\frown}{\text{بح}}$.

23. (γ) دائرة مثلثية و ا نقطة منها .

عيّن النقطتين م و م′ بحيث يكون العددان 1560 و (− 2025) قيسين ، بالدرجات ، للقوسين $\overset{\frown}{\text{ام}}$ و $\overset{\frown}{\text{ام′}}$ ، على الترتيب.

أحسب ، بالراديانات ، القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{\text{مم′}}$.

24. (γ) دائرة مثلثية نصف قطرها 5 سم .

تتحرك نقطة م على الدائرة (γ) ، في الاتجاه الموجب ، منطلقة من ا ومستقرة عند ب .

عيّن القيس الرئيسي للقوس $\overset{\frown}{\text{اب}}$ إذا قطعت النقطة م مسافة قدرها 12 سم .

العلاقات المثلثية الأساسية :

25 . س عدد حقيقي ، أثبت أن

1) (جب س + تجب س)^2 = 1 + 2 جب س تجب س

2) (جب س − تجب س)^2 = 1 − 2 جب س تجب س

3) (جب س + تجب س)^2 + (جب س − تجب س)^2 = 2

4) جب^4 س − تجب^4 س = جب^2 س − تجب^2 س

26 . س عدد حقيقي ، بسط ما يلي:

1) ظل س تجب س

2) جب^3 س + جب س تجب^2 س

3) $\dfrac{1}{\text{تجب}^2 \text{س}} - 1$

4) جب^4 س − تجب^4 س

27 . س عدد حقيقي ، أثبت أن :

1) $1 + \dfrac{\text{جب}^2 \text{س}}{\text{تجب}^2 \text{س}} = \dfrac{1}{\text{تجب}^2 \text{س}}$

2) $1 + \dfrac{\text{تجب}^2 \text{س}}{\text{جب}^2 \text{س}} = \dfrac{1}{\text{جب}^2 \text{س}}$

3) $\frac{1 - \text{تجب س}}{\text{جب س}} = \frac{\text{جب س}}{1 + \text{تجب س}}$

4) $\frac{1 - \text{جب س}}{\text{تجب س}} = \frac{\text{تجب س}}{1 + \text{جب س}}$

28 . أحسب تجب س و جب س إذا كان $\pi < \text{س} < \frac{3\pi}{2}$ وظل س $= 2$

29 . أحسب تجب س وجب س إذا كان $\frac{\pi}{2} < \text{س} < \pi$ وظل س $= -\frac{1}{3}$

30 . أحسب جب س وظل س علما أن $-\frac{\pi}{2} < \text{س} < 0$ وتجب س $= -0{,}3$

31 . أحسب تجب س وظل س إذا كان $\frac{3\pi}{2} < \text{س} < 2\pi$ وجب س $= -0{,}6$

32 . أثبت أن : $(1 + \text{ظل}^2\ \text{س} = 1 + \text{ظل}^2\ \text{ع}) \Leftarrow (\text{تجب}^2\ \text{ع} = \text{تجب}^2\ \text{س})$

33 . س عدد حقيقي حيث $0 \leqslant \text{س} < \frac{\pi}{2}$

1) أثبت أن $\text{تجب}^2\ \text{س} = \frac{1}{1 + \text{ظل}^2\ \text{س}}$

2) أحسب جب س وتجب س علما أن ظل س $= 1{,}5$

34 . س وَ ع قيسان . بالراديان . لزاويتين

أثبت أن : $\left(\text{س} + \text{ع} = \frac{\pi}{2}\right) \Leftarrow \left(\text{تجب}^2\ \text{س} + \text{تجب}^2\ \text{ع} = 1 \ \text{وَ}\ \text{جب}^2\ \text{س} + \text{جب}^2\ \text{ع} = 1\right)$

35 . س و ع قيسان . بالراديان لزاويتين

أثبت أن : $(\text{س} + \text{ع} = \pi) \Leftarrow \left(\text{تجب}^2\ \text{س} + \text{جب}^2\ \text{ع} = 1 \ \text{وَ}\ \text{جب}^2\ \text{س} + \text{تجب}^2\ \text{ع} = 1\right)$

36 . أ ب ح مثلث متساوي الساقين رأسه أ

نسمي ك المسقط العمودي للنقطة أ على المستقيم (ب ح)

و ل المسقط العمودي للنقطة ب على المستقيم (أحـ)

1) أثبت أن : $\widehat{\text{ب أ ك}}$ = حـ ب ل

2) نضع أب = ط .

α قيس ، بالراديان للزاوية [أب ، أك] حيث α ∈ $\left]0 , \frac{\pi}{4}\right[$

أثبت أن : ب حـ = 2 ط جب α ؛ ب ل = ط جب 2 α ؛ $\frac{\text{ب ل}}{\text{ب حـ}}$ = تجب

أستنتج أن :

جب 2 α = 2 جب α تجب α

37 . (ى) دائرة مركزها م ونصف قطرها ىى.

أ وَ ب نقطتان متقابلتان قطريا في الدائرة (ى) و هـ نقطة من (ى) تختلف عـ

أ وَ ب

α قيس ، بالراديان ، للزاوية [أهـ ، أب]

1) أُحسب المسافتين هـ أ وَ هـ ب بدلالة α و ىى

2) نسمي هـ' نقطة تقاطع المستقيم (أهـ) وَ المماس في النقطة ب للدائرة (ى)

أحسب المسافات هـ' أ ، هـ أ ، هـ' ب ، هـ هـ' بدلالة α و ىى

3) أُدرس الحالات الخاصة التالية :

$\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، $\alpha = \frac{\pi}{3}$

38 . أ ب حـ مثلث قائم في الزاوية أ و $\widehat{\text{أ ب حـ}}$ = 60°

1) أُحسب $\widehat{\text{أ حـ ب}}$ ، بالدرجات

2) ب' هي نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى النقطة أ

ما هي طبيعة المثلث ب حـ ب'

3) نضع ب حـ = ط ؛ أ حـ = ك ؛ أ ب = ل

- أُحسب أ ب وَ أ حـ بدلالة ط
- أُحسب أ ب و ب حـ بدلالة ك
- أُحسب أ حـ و ب حـ بدلالة ل

39. أب ح مثلث متساوي الساقين حيث أب = أح
أ′ المسقط العمودي للنقطة أ على (ب ح) وَ ب′ المسقط العمودي للنقطة ب على (أح)
نضع : أب = ط وَ $\widehat{\text{ب أ ح}}$ = 2 α

1) أحسب الأطوال ب ح ، أأ′ ، ب ب′ ، أب′ ، ب′ح بدلالة العددين ط و α

2) بالتعبير عن الطول ب ح بطريقتين مختلفتين
أثبت أن : جب 2 α = 2 جب α تجب α

3) بالتعبير عن الطول أح بطريقتين مختلفتين
أثبت أن : تجب 2 α = 1 − 2 جب^2 α
وَ تجب 2 α = تجب^2 α − جب^2 α

40. عبّر عن الاعداد الحقيقية التالية بواسطة جب س ، تجب س، ظل س ، تظل س

1) تجب $\left(\frac{3\pi}{2} + \text{س}\right)$

2) تجب $\left(\text{س} + 7\pi\right)$

3) تجب $\left(\text{س} - \frac{7\pi}{2}\right)$

4) تجب $\left(\text{س} + \frac{5\pi}{2}\right)$

5) جب $\left(\text{س} - \frac{3\pi}{2}\right)$

6) جب $\left(\text{س} - 9\pi\right)$

7) جب $\left(\frac{5\pi}{2} - \text{س}\right)$

8) جب $\left(\text{س} + \frac{5\pi}{2}\right)$

9) ظل $\left(5\pi - \text{س}\right)$

10) ظل $\left(\text{س} + \frac{3\pi}{2}\right)$

11) ظل $\left(\text{س} - \frac{9\pi}{2}\right)$

12) ظل $\left(\text{س} + 3\pi\right)$

ت1. α عدد حقيقي . أُحسب المجاميع التالية :

1) تجب $(\alpha+\pi)$ + تجب $(\alpha+2\pi)$ + تجب $(\alpha-\pi)$ + تجب $(\alpha-3\pi)$

2) تجب $\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ + جب $(\pi-\alpha)$ + جب $(\pi+\alpha)$

3) جب $\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ + تجب $\left(\frac{7\pi}{2}-\alpha\right)$ + جب $(3\pi+\alpha)$

− تجب $(7\pi-\alpha)$

4) ظل $(\pi-\alpha)$ + ظل $(\pi+\alpha)$ + ظل $(2\pi-\alpha)$ + ظل $\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$

5) ظل $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ + ظل $\left(\alpha+\frac{5\pi}{2}\right)$

ت2. س عدد حقيقي ، بسط المجاميع التالية :

1) 2 تجب^2 (− س) + تجب (− س) + 1

2) جب^2 (π − س) − 2 جب (π − س) + 3

3) جب^3 $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ − س$\left.\right)$ + تجب^3 $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ − س$\left.\right)$ − تجب س − جب س

4) تجب $\left[2\right.$ (س + $\left.\frac{\pi}{2})\right]$ + جب $\left[2\right.$ (س + $\left.\frac{\pi}{2})\right]$

المعادلات المثلثية الأساسية :

ت3. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) تجب س = $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) تجب $\left(2\right.$ س $\left.-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}=0$

3) $4\,\text{تجب}^2\,\text{س} + 1 = 0$

4) $4\,\text{تجب}^2\,\text{س} - 1 = 0$

5) $2\,\text{تجب}\left(3\,\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

6) $\text{تجب}\,2\,\text{س} = \text{تجب}\,\frac{\pi}{4}$

7) $\text{تجب}^2\,\text{س} = 1$

8) $\text{تجب}\,2\,\text{س} + 1 = 0$

9) $\text{تجب}\,3\,\text{س} = \text{تجب}\left(\frac{\pi}{7} - \text{س}\right)$

10) $\text{تجب}\,5\,\text{س} = \text{تجب}\left(\frac{2\pi}{3} - \text{س}\right)$

11) $\text{تجب}\left(3\,\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) = \text{تجب}\left(2\,\text{س} + \frac{\pi}{3}\right)$

ب . حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) $\text{جب}\,\text{س} = \frac{1}{2}$

2) $\text{جب}\,5\,\text{س} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $2\,\text{جب}^2\,\text{س} + 3 = 0$

4) $2\,\text{جب}^2\,\text{س} - 3 = 0$

5) $4\,\text{جب}^2\,\text{س} - 1 = 0$

6) $\text{جب}\,3\,\text{س} = 1$

7) $2\,\text{جب}\,\text{س} + 2 = 0$

8) $2\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{3} - \text{س}\right) = \sqrt{3}$

9) جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{3} - \text{س}\right)$

10) جب $\left(\text{س} + \frac{\pi}{3}\right)$ = جب $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

11) جب $\left(2\,\text{س} + \frac{\pi}{3}\right)$ = جب $\left(\frac{2\pi}{3} - \text{س}\right)$

. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) ظل س = ظل $\frac{\pi}{6}$

2) ظل س = 1

3) ظل^2 س − 3 = 0

4) ظل $\left(2\,\text{س} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

5) ظل $\left(\text{س} - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$

6) ظل 3 س = ظل $\left(\frac{\pi}{3} - 2\,\text{س}\right)$

7) ظل 3 س = ظل $\left(\text{س} + \frac{\pi}{4}\right)$

8) ظل $\left(\frac{\text{س}}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ = ظل $\left(\frac{\text{س}}{2} + \frac{\pi}{5}\right)$

. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) 2 جب^2 س − 3 جب س + 1 = 0

2) 2 تجب^2 س − 7 تجب س + 3 = 0

3) 4 جب^2 س − 2 $(1 - \sqrt{3})$ جب س − $\sqrt{3} = 0$

4) ظل^2 س + $(\sqrt{3} + 1)$ ظل س + $\sqrt{3} = 0$

5) 2 تجب^2 2 س − 3 تجب 2 س + 1 = 0

47. حل ، في ح ، المعادلات التالية :

1) تجب $\left(6\,\text{س} + \frac{\pi}{3}\right)$ = تجب $\left(2\,\text{س} - \frac{\pi}{6}\right)$ وَ $0 \leqslant$ س $\leqslant 2\pi$

2) جب س = جب $\frac{3\pi}{10}$ وَ تجب س < 0

3) جب 2 س = جب $\left(\frac{\pi}{2} - 3\,\text{س}\right)$ وَ $-\pi <$ س $< 3\pi$

4) تجب 2 س = − تجب س وَ $0 \leqslant$ س $< 2\pi$

الباب الثامن

الدوال العددية

لقد قدمت في السنة السابقة بعض المفاهيم المتعلقة بالتطبيقات التآلفية (التغيرات ، التمثيل البياني ....) . في هذه السنة ، تعمّم هذه المفاهيم وتدعّم بتمات تمكّن التلاميذ من دراسة كاملة لدوال عددية أخرى :

س ↦ أ س^2 + ب س + حـ (أ ≠ 0)

س ↦ $\frac{أ}{س}$ (أ ≠ 0)

وتطبيقا لما ورد في البرنامج فإن مفهومي النهاية والمستقيم المقارب قد تمّ استخراجها انطلاقا من أمثلة بسيطة

27	عموميات على الدوال العددية لمتغير حقيقي

1 ـ الدوال العددية لمتغير حقيقي :

تعريف

> تسمى كل دالة لمجموعة الأعداد الحقيقية ح في نفسها دالة عددية لمتغير حقيقي

إذا كانت تا دالة عددية للمتغير الحقيقي س فإن العنصر تا (س) يسمى صورة العنصر س بالدالة تا

العنصر س يسمى سابقة للعنصر تا (س)

مجموعة تعريف الدالة تا هي مجموعة عناصر المجموعة ح التي لها صورة في ح بالدالة تا

أمثلة :

1) الدالة تا : ح ⟵ ح

س ↦ 3 س^2

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

ف$_{تا}$ = ح =] – ∞ ، + ∞ [

2) الدالة ها : ح ← ح

س ↦ $\frac{1}{س - 1}$ هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح باستثناء 1

ف$_{ها}$ = ح – { 1 } =] – ∞ ، 1 [∪] 1 ، + ∞ [

3) الدالة عا : ح ← ح

$س \mapsto \sqrt{2 - س}$

هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س

تكون هذه الدالة معرفة إذا وفقط إذا كان $2 - س \geqslant 0$

$ف_{عا} =]-\infty ، 2]$

4) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي تجب س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وتسمى الدالة جيب تمام

تجب : ح ← ح

س ↦ تجب س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

5) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي جب س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وَ تسمى الدالة الجيب

جب : ح ← ح

س ↦ جب س

مجموعة تعريفها هي المجموعة ح

6) الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي س العدد الحقيقي ظل س هي دالة عددية للمتغير الحقيقي س وتسمى الدالة الظل

ظل : ح ← ح

س ↦ ظل س

نعلم أن ظل س معرف إذا وفقط إذا كان تجب س $\neq 0$

$تجب\ س = 0 \Leftrightarrow تجب\ س = تجب \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow س = \frac{\pi}{2} + \pi ك$. (ك ∈ ص)

إذن مجموعة تعريف الدالة الظل هي المجموعة ح باستثناء الأعداد الحقيقية

من الشكل $\frac{\pi}{2} + \pi$ ك ، (ك ∋ ص)

2 ـ اتجاه تغير دالة على مجال

1.2 ـ تعاريف :

لقد رأينا في السنة السابقة ما يلي :

إذا اعتبرنا ، مثلا ، الدالة تا : س ↦ 3 س

وأخذنا عددين كيفيين س$_1$ و س$_2$ فإن العددين تا(س$_1$) وَ تا (س$_2$)
مرتبان في نفس الترتيب بالنسبة لترتيب العددين س$_1$ وَ س$_2$ وَقلنا إن الدالة
تا متزايدة تماما على ح .

وإذا اعتبرنا الدالة ها : س ↦ − 2 س وَأخذنا عددين كيفيين س$_1$ و س
فإن العددين ها (س$_1$) وَ ها (س$_2$) مرتبان في الترتيب العكسي بالنسبة
لترتيب العددين س$_1$ وَ س$_2$ وقلنا إن الدالة ها متناقصة تماما على ح
وبصورة عامة يمكن إعطاء التعاريف التالية :
تا دالة عددية معرفة على مجال ل .

تعريف 1 :

تكون تا متزايدة تماما على ل إذا وَفقط إذا تحقق ما يلي

∀ س$_1$ ∋ ل ، ∀ س$_2$ ∋ ل : س$_1$ < س$_2$ ⇐ تا (س$_1$) < تا (س$_2$)

تعريف 2 :

تكون تا متزايدة على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

∀ س$_1$ ∋ ل ، ∀ س$_2$ ∋ ل : س$_1$ < س$_2$ ⇐ تا (س$_1$) ⩽ تا (س$_2$)

تعريف 3 :

تكون تا متناقصة تماما على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي

∀ س$_1$ ∋ ل ، ∀ س$_2$ ∋ ل : س$_1$ < س$_2$ ⇐ تا (س$_1$) > تا (س$_2$)

تعريف 4 :

> تكون تا متناقصة على ل إذا وَفقط إذا تحقق ما يلي
>
> ∀ س$_1$ ∈ ل ، ∀ س$_2$ ∈ ل : س$_1$ < س$_2$ ⇐ تا (س$_1$) ⩾ تا (س$_2$)

تعريف 5 :

> تكون تا ثابتة على ل إذا وفقط إذا تحقق ما يلي
>
> ∀ س$_1$ ∈ ل ، ∀ س$_2$ ∈ ل : تا (س$_1$) = تا (س$_2$)

إذا كانت الدالة تا إما متناقصة أو إما متزايدة على ل نقول إنها رتيبة على ل

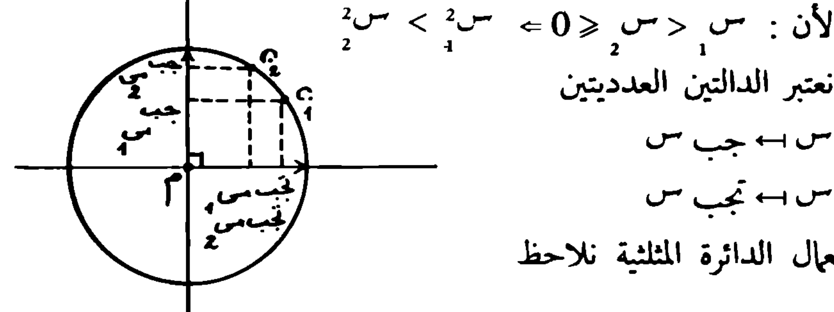
أمثلة :

1) الدالة العددية تا : س ↦ س^2 متزايدة تماما على المجال $[0 , +\infty[$

لأن : 0 ⩽ س$_1$ < س$_2$ ⇐ س$_1^2$ < س$_2^2$

2) الدالة العددية تا : س ↦ س^2 متناقصة تماماً على المجال $]-\infty , 0]$

لأن : س$_1$ < س$_2$ ⩽ 0 ⇐ س$_1^2$ > س$_2^2$



3) نعتبر الدالتين العدديتين

س ↦ جب س

س ↦ تجب س

باستعمال الدائرة المثلثية نلاحظ

أنه إذا كان : 0 ⩽ س$_1$ < س$_2$ ⩽ $\frac{\pi}{2}$ فإن جب س$_1$ < جب س$_2$

وَإذا كان : 0 ⩽ س$_1$ < س$_2$ ⩽ $\frac{\pi}{2}$ فإن تجب س$_1$ > تجب س$_2$

الدالة الجيب متزايدة تماما على $[0 , \frac{\pi}{2}]$ والدالة الجيب تمام متناقصة تماما على $[0 , \frac{\pi}{2}]$

2.2 ـ نسبة تزايد دالة

إذا كانت دالة عددية تا متزايدة على مجال ل فإن النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ تكون موجبة مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ وإذا كانت تا متناقصة على ل فإن النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ تكون سالبة مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ وَ $س_2$

تعريف :

> تسمى النسبة $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$ **نسبة تزايد الدالة تا بين** العددين الحقيقين المختلفين $س_1$ وَ $س_2$

من هذا التعريف ومن التعاريف السابقة نستنتج ما يلي

- تا متزايدة تماما على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in ل ، \forall س_2 \in ل (س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} > 0$$

- تا متزايدة على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in ل ، \forall س_2 \in ل (س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} \geqslant 0$$

- تا متناقصة تماما على ل $\Leftrightarrow \forall س_1 \in ل ، \forall س_2 \in ل (س_1 \neq س_2)$

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} < 0$$

• تا متناقصة على ل $\Leftrightarrow \forall\, \text{س}_1 \in \text{ل} ، \forall\, \text{س}_2 \in \text{ل} \; (\text{س}_1 \neq \text{س}_2)$

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} \leqslant 0$$

• تا ثابتة على ل $\Leftrightarrow \forall\, \text{س}_1 \in \text{ل} ، \forall\, \text{س}_2 \in \text{ل} \; (\text{س}_1 \neq \text{س}_2)$

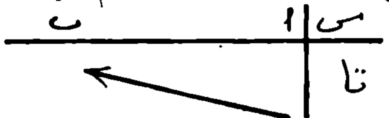
$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = 0$$

3.2 ـ جدول تغيرات دالة

إن دراسة تغيرات دالة تا تعني تعيين المجالات من مجموعة تعريفها التي تكون فيها تا متزايدة والمجالات التي تكون فيها تا متناقصة

تسجل نتائج هذه الدراسة في جدول يسمى جدول تغيرات تا

إذا كانت تا متزايدة على المجال [أ ، ب] نرسم الجدول التالي



وَ إذا كانت متناقصة على المجال [أ ، ب] نرسم الجدول التالي :

س	أ	ب
تا	↘	

3 ـ التمثيل البياني لدالة

المستوي منسوب إلى معلم $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ى}})$

1.3 ـ تعريف :

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف

المنحنى (ى) الممثل للدالة تا في المعلم $(\text{م} ، \overleftarrow{\text{و}} ، \overleftarrow{\text{ي}})$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي بحيث يكون :   س ∈ ف و ع = تا (س)

المعادلة ع = تا (س) تسمى معادلة المنحني (ي)

مثال :

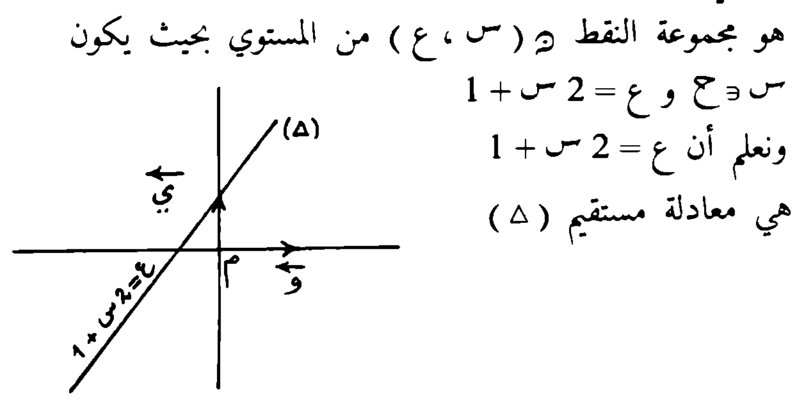
المنحني الممثل للدالة تا : س ⟼ 2 س + 1

هو مجموعة النقط ⓜ (س ، ع) من المستوي بحيث يكون

س ∋ ح و ع = 2 س + 1

ونعلم أن ع = 2 س + 1

هي معادلة مستقيم (Δ)



2.3 ـ العناصر التي تساعد على رسم المنحنيات

• الدوال الزوجية

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف من ح

تكون الدالة تا زوجية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي ∀ س ∋ ف : − س ∋ ف وَ تا (− س) = تا (س)

أمثلة :

1) الدالة العددية س ← س² زوجية لأنه :

∀ س ∋ ح : − س ∋ ح و (− س)² = س²

2) الدالة العددية س ⟼ $\frac{1}{|س|}$ زوجية لأنه

∀ س ∋ ح* : − س ∋ ح* وَ $\frac{1}{|-س|} = \frac{1}{|س|}$

3) الدالة العددية س ↦ تجب س زوجية لأنه

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح و تجب (− س) = تجب س

إذا كانت الدالة تا زوجية وكان

(ي) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد

(م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) فإن النقطتين

ه (س ، تا (س)) وَ

ه′ (− س ، تا (− س)) لهما

فاصلتان متعاكستان وترتيبان متساويان ، فهما متناظرتان بالنسبة إلى محور التراتيب

محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني (ي)

• **الدوال الفردية :**

تا دالة عددية معرفة على المجموعة ف من ح

تكون الدالة تا فردية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي ∀ س ∈ ف : − س ∈ ف و تا (− س) = − تا (س)

أمثلة :

1) الدالة العددية س ↦ $\frac{2}{س}$ فردية لأن :

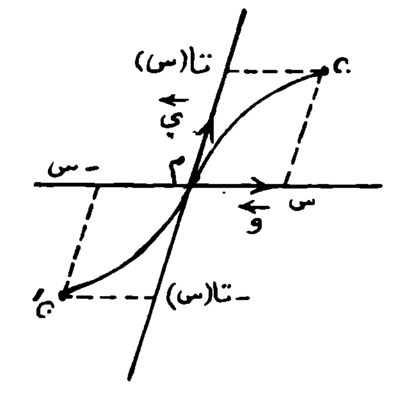
∀ س ∈ ح* : − س ∈ ح* وَ $\frac{2}{-س} = -\frac{2}{س}$

2) الدالة العددية س ↤ جب س فردية لأن :

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح وَ جب (− س) = − جب س

3) الدالة العددية س ↤ س³ فردية لإن :

∀ س ∈ ح : − س ∈ ح وَ (− س)³ = − س³



إذا كانت الدالة تا فردية وكان (ي) تمثيلها البياني في المعلم (م ، و ، ي) فإن النقطتين

ن (س ، تا (س))

وَ نَ (− س ، تا (− س)) لهما فاصلتان متعاكستان وَترتيبان

متعاكسان فهما متناظرتان بالنسبة إلى النقطة م

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (ي)

28 الدالة التآلفية

1 ـ تعريف :

نسمي دالة تآلفية كل دالة عددية تا للمتغير الحقيقي س المعرفة كما يلي :

تا (س) = ا س + ب حيث ا و ب عددان حقيقيان

- إذا كان ب معدوماً نقول إن الدالة تا **خطية**
- إذا كان ا معدوماً تكون الدالة تا **ثابتة**

أمثلة :

1) الدالة : س ↤ − 2 س + 1 تآلفية .

2) الدالة : س ↤ 4 س تآلفية وهي خطية

3) الدالة : س ↤ − 5 تآلفية وهي ثابتة

4) الدالة : س ↤ $س^2$ + 1 ليست تآلفية .

2 ـ دراسة الدالة تا : س ↤ 4 س

- **مجموعة التعريف** : الدالة تا معرفة على ح .
- **اتجاه التغير**

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$

لدينا :

$$\frac{تا (س_1) - تا (س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{4 س_1 - 4 س_2}{س_1 - س_2} = 4$$

بما أن هذه النسبة موجبة تماما فإن الدالة تا متزايدة تماماً على ح .

- **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |** :

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد س
وقيم تا (س) المناسبة لها .

س	10	10^2	10^3	10^4
تا (س)	40	400	4000	40000

نلاحظ أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .
والسؤال الذي يمكن طرحه هو : هل يمكن جعل تا (س) كبيراً بالقدر الذي نريده ؟
وبتعبير آخر : هل يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم ل ؟
لدينا :

تا (س) $>$ ل $\Leftrightarrow$ 4 س $>$ ل

$\Leftrightarrow$ س $>$ $\frac{ل}{4}$

إذن للحصول على تا (س) $>$ ل يكفي أخذ س $>$ $\frac{ل}{4}$ (مثلا لكي يكون

تا (س) $> 10^9$ يكفي أخذ س $> \frac{1}{4} 10^9$)

ونعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** $\to +\infty$ **عندما س** $\to +\infty$

ومن جهة أخرى نلاحظ ، في الجدول التالي :

س	-10^2	-10^2	-10^3	-10^4
تا (س)	-40	-400	-4000	-40000

أن قيم (− تا (س) ، تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون (− س) كبيراً . ويمكن ، هنا ، القول إن :

(− تا (س)) ← + ∞ عندما (− س) ← + ∞

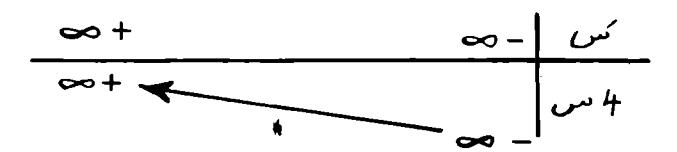
نقول ، في هذه الحالة ، إن :

تا (س) يؤول إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← − ∞ **عندما س** ← − ∞

• **جدول التغيرات** :

نسجل في الجدول التالي نتائج الدراسة السابقة :

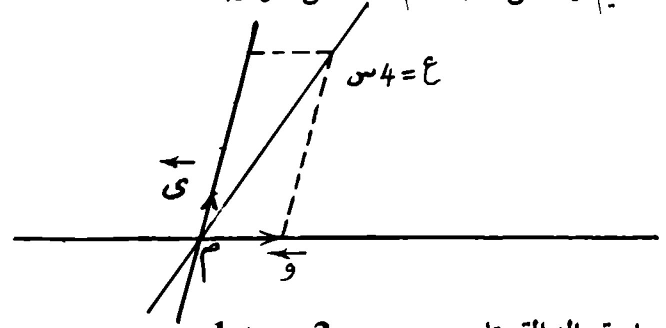


• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، و⃖ ، ى⃖) المنحني الممثل للدالة تا : س ↦ 4 س هو مجموعة النقط ﻫ (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∈ ح و ع = 4 س

ونعلم أن ع = 4 س هي معادلة مستقيم .

هذا المستقيم يشمل المبدأ م ومعامل توجيهه 4



3 ـ **دراسة الدالة تا** : **س ↦ − 2 س + 1** :

• **مجموعة التعريف** : الدالة تا معرفة على ح .

- **اتجاه التغير**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$

لدينا :

$$\frac{\text{تا}(س_1) - \text{تا}(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(-2س_1 + 1) - (-2س_2 + 1)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{-2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2} = -2$$

بما أن هذه النسبة سالبة تماماً فإن الدالة تا متناقصة تماماً على ح .

- **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد |س|**

الجدول التالي يعطي بعض القيم الكبيرة للعدد س وقيم تا (س) المناسبة لها :

س	10	10^2	10^3	10^4
تا(س)	-19	-199	-1999	-19999

نلاحظ أن قيم (− تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .

نفس السؤال الذي طرح في المثال السابق يمكن طرحه هنا :

هل يمكن جعل (− تا(س)) أكبر من أي عدد معلوم ل ؟

لدينا :

$$-\text{تا}(س) > ل \Leftrightarrow -(-2س + 1) > ل$$

$$\Leftrightarrow س > \frac{1 + ل}{2}$$

إذن :

لكي يكون $(-\text{تا}(س)) > ل$ يكفي أخذ $س > \frac{1 + ل}{2}$ (مثلاً

للحصول على $-$ تا (س) > 10^{11} يكفي أخذ س > $\left(\frac{1 + 10^{11}}{2}\right)$

ونعبّر عن هذه الحالة بالقول إن :

تا (س) يؤول إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← $- \infty$ **عندما س** ← $+ \infty$

ومن جهة أخرى وبطريقة مماثلة نحصل على ما يلي :

يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول ($-$ س) إلى ما لا نهاية .

نقول في هذه الحالة إن :

تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : **تا (س)** ← $+ \infty$ **عندما س** ← $- \infty$

• **جدول التغيرات** :

نسجل في الجدول التالي نتائج الدراسة السابقة :

س	$-\infty$	$+\infty$
-2 س $+1$	$+\infty$ ↘	$-\infty$

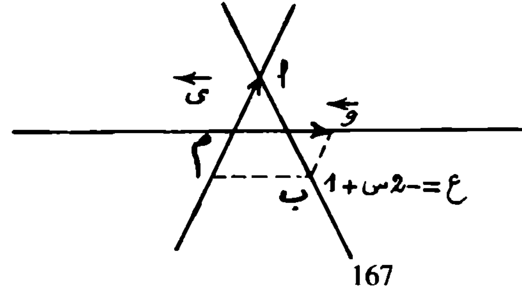
• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) المنحني الممثل للدالة تا : س ↦ $-$ 2 س + 1

هو مجموعة النقط ﻫ (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∈ ح و ع = $-$ 2 س + 1

ونعلم أن ع = $-$ 2 س + 1 هي معادلة مستقيم .

لرسم هذا المستقيم يكفي أخذ نقطتين منه مثلا النقطتين أ (0 ، 1) و ب (1 ، $-$ 1) .



4 ـ دراسة الدالة التآلفية تا : س ↦ أ س + ب

• **مجموعة التعريف :**

الدالة التآلفية س ↦ أ س + ب معرفة على ح .

• **اتجاه التغير**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(أس_1 + ب) - (أس_2 + ب)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{أ(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2} = أ$$

نميز ثلاث حالات :

إذا كان أ = 0 تكون الدالة تا ثابتة على ح .

إذا كان أ > 0 تكون الدالة تا متزايدة تماما على ح .

إذا كان أ < 0 تكون الدالة تا متناقصة تماما على ح .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |**

كما رأينا في المثالين السابقين يمكن التأكد من النتائج التالية :

1) إذا كان أ > 0 فإن :

تا (س) ← + ∞ عندما س ← + ∞

تا (س) ← − ∞ عندما س ← − ∞

2) إذا كان أ < 0 فإن :

تا (س) ← − ∞ عندما س ← + ∞

تا (س) ← + ∞ عندما س ← − ∞

• جدول التغيرات :

أ > 0

س	$-\infty$		$+\infty$
تا(س)	$-\infty$	↗	$+\infty$

أ < 0

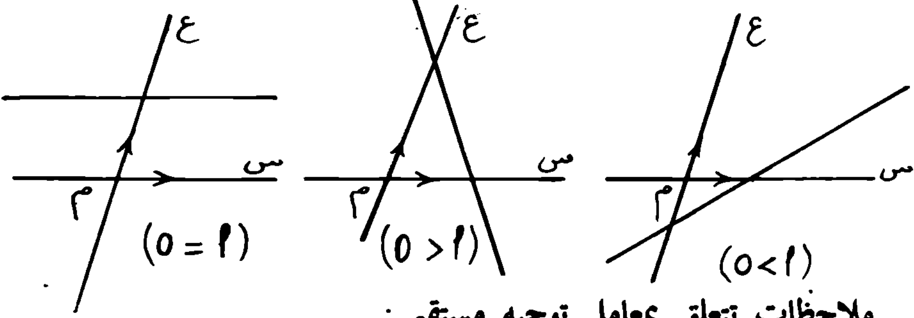
س	$-\infty$		$+\infty$
تا(س)	$+\infty$	↘	$-\infty$

• **التمثيل البياني** : في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) المنحني الممثل للدالة التآلفية س ↤ أ س + ب

هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي حيث :

س ∈ ح و ع = أ س + ب .

ونعلم أن ع = أ س + ب هي معادلة مستقيم معامل توجيهه أ .



ملاحظات تتعلق بمعامل توجيه مستقيم :

نذكر فيما يلي بعض النتائج المتعلقة بمعامل توجيه مستقيم :

• معامل توجيه المستقيم الذي يشمل النقطتين $ن_1$ ($س_1$ ، $ع_1$) و $ن_2$ ($س_2$ ، $ع_2$) حيث $س_1 \neq س_2$ هو النسبة : $\frac{ع_1 - ع_2}{س_1 - س_2}$

• إذا كان أ و أ′ معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ′) فإن :

$$أ = أ' \Leftrightarrow (\Delta) // (\Delta')$$

• إذا كان أ و أ′ معاملي توجيه المستقيمين (Δ) و (Δ′) وكان المعلم متعامداً ومتجانساً فإن :

$$أ أ' = -1 \Leftrightarrow (\Delta) \perp (\Delta')$$

29	الدالة س ↤ أ س^2 + ب س + جـ (أ ≠ 0)

1 ـ دراسة الدالة تا : س ↤ س^2 :

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير :**

مهما كان العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا (س}_1\text{) − تا (س}_2\text{)}}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \frac{\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \frac{(\text{س}_1 + \text{س}_2)(\text{س}_1 - \text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \text{س}_1 + \text{س}_2$$

إذا كان س$_1$ ⩾ 0 و س$_2$ ⩾ 0 و س$_1$ ≠ س$_2$ فإن : س$_1$ + س$_2$ > 0

وإذا كان س$_1$ ⩽ 0 و س$_2$ ⩽ 0 و س$_1$ ≠ س$_2$ فإن : س$_1$ + س$_2$ < 0

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على] − ∞ ، 0] ومتزايدة تماماً على [0 ، +∞ [.

لدينا :

تا (0) = 0 و ∀ س ∈ ح : تا (س) ⩾ تا (0)

يسمى العدد تا (0) **القيمة الصغرى** للدالة تا .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س | .**

نلاحظ ، في الجدول التالي ، أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيراً .

س	10	10^2	10^3	10^4
تا (س)	10^2	10^4	10^6	10^8

لنفرض أن س موجب وَ لنبرهن أنه يمكن جعل تا (س) أكبر من أي عدد معلوم موجب ل .

تا (س) > ل ⟺ س^2 > ل

⟺ س > $\sqrt{ل}$ (لأن س موجب)

لكي يكون تا (س) > ل يكفي أخذ س > $\sqrt{ل}$ (مثلاً للحصول على تا (س) > 10^{12} يكفي أخذ س > 10^{6}) .

نعبر عن هذه الحالة بالقول :

إن تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ما لا نهاية

ونكتب :

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← + ∞

وبطريقة مماثلة نحصل على ما يلي :

يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول (− س) إلى ما نهاية .

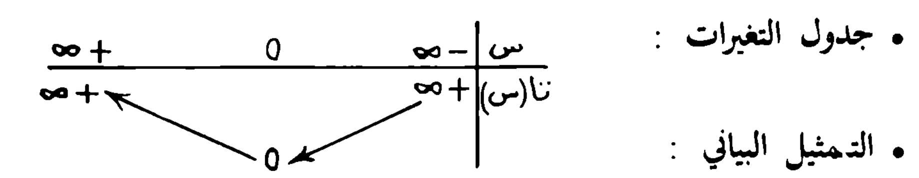
نقول ، في هذه الحالة إن :

تا (س) يؤول إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية .

ونكتب :

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← − ∞

- **جدول التغيرات** :



- **التمثيل البياني** :

المستوي منسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .

المنحني الممثل للدالة س ↦ س^2 هو مجموعة النقط ﻥ (س ، ع) من المستوي حيث س ∈ ح و ع = س^2 .

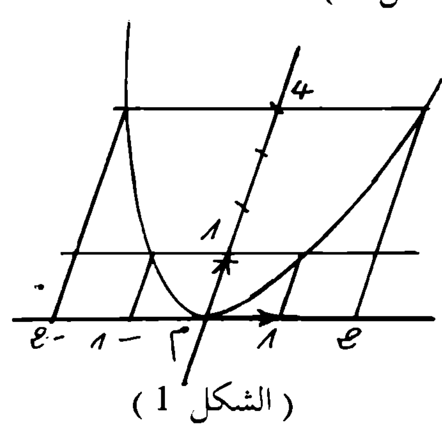
لرسم هذا المنحني ننشيء بعض النقط منه .

الجدول التالي يعطي إحداثيات هذه النقط

س	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
ع $=$ س^2	9	4	$\frac{9}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4	9

يسمى هذا المنحني **قطعا مكافئاً** (الشكل 1)

نلاحظ أن هذا المنحني يشمل النقطة م وَإذا أنشأنا عدة نقط مجاورة للنقطة م نحصل على منحن له المظهر المبيّن في الشكل المجاور .



(الشكل 1)

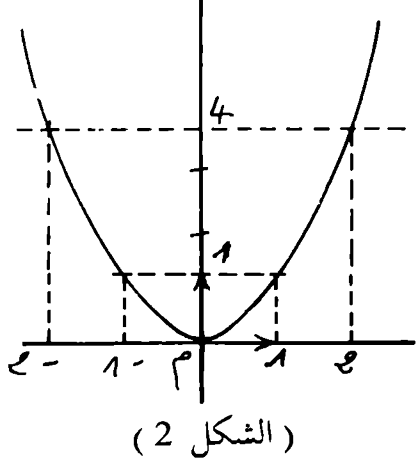
من جهة أخرى نلاحظ أن الدالة تا زوجية :

$\forall$ س $\in$ ح : ($-$ س) $\in$ ح

و تا (س) $=$ تا ($-$ س)

إذن ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، محور التراتيب هو محور تناظر للمنحني . (الشكل 2)

تسمي النقطة م **ذروة القطع المكافيء**



(الشكل 2)

2 ـ دراسة الدالة تا : س $\mapsto$ − 2 س^2 + 3

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير :**

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \frac{(-2\text{س}_1^2 + 3) - (-2\text{س}_2^2 + 3)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= \frac{-2(\text{س}_1^2 - \text{س}_2^2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2}$$

$$= -2(\text{س}_1 + \text{س}_2)$$

إذا كان س$_1 \leqslant 0$ وَ س$_2 \leqslant 0$ وَ س$_1 \neq$ س$_2$ فإن :

$-2(\text{س}_1 + \text{س}_2) > 0$

إذا كان س$_1 \geqslant 0$ وَ س$_2 \geqslant 0$ وَ س$_1 \neq$ س$_2$ فإن :

$-2(\text{س}_1 + \text{س}_2) < 0$

إذن :

الدالة تا متزايدة تماماً على] − ∞ ، 0] ومتناقصة تماماً على [0 ، + ∞ [

لدينا :

تا (0) = 3 و $\forall$ س $\in$ ح : تا (س) − تا (0) = − 2 س^2

إذن : $\forall$ س $\in$ ح تا (س) $\leqslant$ تا (0)

يسمى العدد تا (0) القيمة العظمى للدالة تا .

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س | .**

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

س	-10	-10^{2}	-10^{3}
تا (س)	-197	-1997	-19997

س	10	10^{2}	10^{3}
تا (س)	-197	-1997	-19997

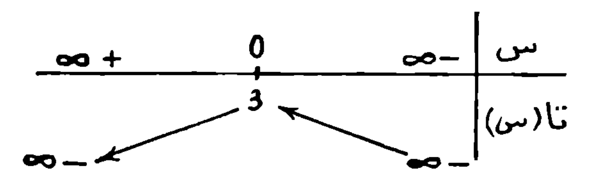
أن قيم (− تا (س)) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم | س | كبيرة .

كما رأينا في الأمثلة السابقة يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow +\infty$

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow -\infty$

- **جدول التغيرات** :



- **التمثيل البياني** :

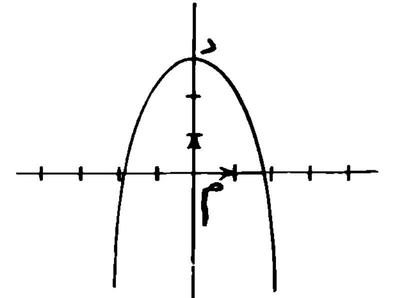
المنحني (γ) الممثل للدالة : س ↤ -2 س^{2} + 3 هو مجموعة النقط م (س ، ع) من المستوي حيث س ∋ ح وَ ع = − 2 س^{2} + 3 .

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (γ)

س	-3	-2	-1	0	1	2	3
تا (س)	-15	-5	$+1$	3	1	-5	-15

المنحني (γ) يسمى ، أيضاً ، **قطعا مكافئاً** .

إذا رسمنا (γ) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد نحصل على منحنٍ له المظهر المبيّن في الشكل التالي :



محور التراتيب هو محور تناظر (γ) .
ذروة القطع المكافيء (γ)
هي النقطة د (0 ، 3)

3. دراسة الدالة تا : س $\mapsto \frac{1}{2}$ س^2 − 2 س + 1

• **مجموعة التعريف :**

الدالة تا معرفة على ح .

• **اتجاه التغير :**

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان س$_1$ و س$_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{(\frac{1}{2}س_1^2 - 2س_1 + 1) - (\frac{1}{2}س_2^2 - 2س_2 + 1)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(س_1^2 - س_2^2) - 2(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1 - س_2)\left[\frac{1}{2}(س_1 + س_2) - 2\right]}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{1}{2}(س_1 + س_2) - 2$$

يمكن كتابة نسبة التزايد كما يلي :

$$\frac{\text{تا}(\text{س}_1) - \text{تا}(\text{س}_2)}{\text{س}_1 - \text{س}_2} = \frac{1}{2}\left[\text{س}_1 + \text{س}_2 - 4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\text{س}_1 - 2) + (\text{س}_2 - 2)\right]$$

إذا كان $\text{س}_1 \leqslant 2$ وَ $\text{س}_2 \leqslant 2$ وَ $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$ فإن :

$$\frac{1}{2}\left[(\text{س}_1 - 2) + (\text{س}_2 - 2)\right] < 0$$

إذا كان $\text{س}_1 \geqslant 2$ وَ $\text{س}_2 \geqslant 2$ وَ $\text{س}_1 \neq \text{س}_2$ فإن :

$$\frac{1}{2}\left[(\text{س}_1 - 2) + (\text{س}_2 - 2)\right] > 0$$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على $]-\infty \text{ ، } 2]$ وَ متزايدة تماماً على $[2 \text{ ، } +\infty[$

لدينا : $\text{تا}(2) = -1$ وَ $\forall \text{س} \in \text{ح}$ $\text{تا}(\text{س}) \geqslant \text{تا}(2)$

لأن : $\forall \text{س} \in \text{ح}$ $\text{تا}(\text{س}) - \text{تا}(2) = \frac{1}{2}(\text{س} - 2)^2$

تا (2) هو **القيمة الصغرى للدالة تا** .

- **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |**

نلاحظ ، في الجدولين التاليين

س	10	10^2	10^3
تا(س)	31	4801	498001

س	-10	-10^2	-10^3
تا(س)	71	5201	502001

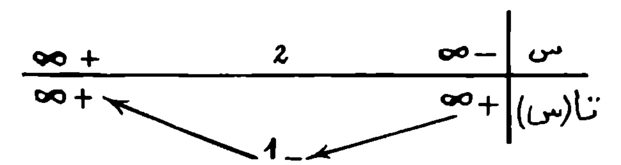
أن قيم تا (س) تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما تكون قيم | س | كبيرة .

كما رأينا في الأمثلة السابقة ، يمكن التأكد من النتيجة التالية :

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← + ∞

تا (س) ← + ∞ **عندما س** ← − ∞

• **جدول التغيرات** :



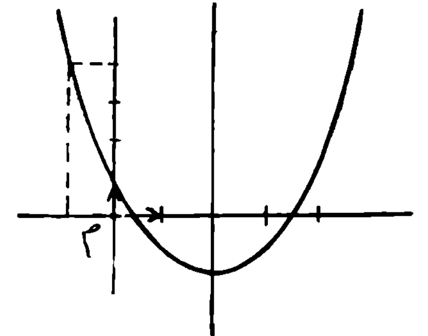
• **التمثيل البياني** :

المنحني (४) للدالة س ↦ $\frac{1}{2}$ س^2 − 2س + 1 هو مجموعة النقط

ه (س ، ع) من المستوي حيث س ∈ ح وَ ع = $\frac{1}{2}$ س^2 − 2س + 1 .

الجدول التالي يعطي إحداثيات بعض النقط من (४)

س	1 −	0	1	2	3	4
تا (س)	$\frac{7}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1 −	$-\frac{1}{2}$	1



المنحني (γ) يسمى ، أيضاً ، **قطعا مكافئاً** .

وفي المستوى المنسوب إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) ، المستقيم ذو المعادلة س = 2 هو محور تناظر للمنحني (γ) .

وَلإثبات ذلك نقوم بتغيير للمعلم محتفظين بالأساس ($\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) ومتخذين النقطة د (2 ، – 1) مبدأ جديداً .

(كما هو مبين في جدول التغيرات . الدالة تا تأخذ قيمتها الصغرى (– 1) من أجل س = 2) .

نعلم أنه إذا كان (س ، ع) إحداثيي النقطة ﻫ في المعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) و (س′ ، ع′) إحداثيها في المعلم (د ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) فإن :

س = 2 + س′

ع = – 1 + ع′

معادلة (γ) في المعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$)

هي ع = $\frac{1}{2}$ س^2 – 2 س + 1

ومعادلته في المعلم الجديد (د ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) هي :

– 1 + ع′ = $\frac{1}{2}$ (2 + س′)^2 – 2 (2 + س′) + 1

أي : ع′ = $\frac{1}{2}$ س′^{2}

بما أن الدالة س′ ↤ $\frac{1}{2}$ س′^{2} زوجية فإن محور التراتيب للمعلم الجديد هو محور تناظر لتمثيلها البياني (γ)

معادلة هذا المحور ، في المعلم الجديد هي س′ = 0

ومعادلته ، في المعلم (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$) هي س = 2 .

إذن : المستقيم ذو المعادلة س = 2 هو محور تناظر للمنحني (γ)

4 ـ دراسة الدالة تا : $س \mapsto ا س^2 + ب س + ح$ ($ا \neq 0$) :

• مجموعة التعريف

الدالة تا معرفة على ح .

• اتجاه التغير :

مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان $س_1$ و $س_2$ لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(ا س_1^2 + ب س_1 + ح) - (ا س_2^2 + ب س_2 + ح)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{ا(س_1^2 - س_2^2) + ب(س_1 - س_2)}{س_1 - س_2}$$

$$= \frac{(س_1 - س_2)[ا(س_1 + س_2) + ب]}{س_1 - س_2}$$

$$= ا(س_1 + س_2) + ب$$

يمكن كتابة نسبة التزايدات هذه كما يلي :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = ا\left[(س_1 + س_2) + \frac{ب}{ا}\right]$$

$$= ا\left[(س_1 + \frac{ب}{2ا}) + (س_2 + \frac{ب}{2ا})\right]$$

نميز حالتين : $ا > 0$. و $ا < 0$

الحالة الأولى $أ > 0$:

إذا كان $س_1 \leqslant -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \leqslant -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] < 0$$

إذا كان $س_1 \geqslant -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \geqslant -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] > 0$$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماماً على $\left]-\infty , -\frac{ب}{2أ}\right]$ ومتزايدة تماما على $\left[-\frac{ب}{2أ} , +\infty\right[$.

الحالة الثانية $أ < 0$:

إذا كان $س_1 \leqslant -\frac{ب}{2أ}$ و $س_2 \leqslant -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] > 0$$

إذا كان $س_1 \geqslant -\frac{ب}{2أ}$ وَ $س_2 \geqslant -\frac{ب}{2أ}$ و $س_1 \neq س_2$ فإن :

$$أ\left[(س_1 + \frac{ب}{2أ}) + (س_2 + \frac{ب}{2أ})\right] < 0 .$$

إذن :

الدالة تا متزايدة تماماً على $\left]-\infty , \frac{-ب}{2أ}\right]$ ومتناقصة تماماً على $\left[\frac{-ب}{2أ} , +\infty\right[$

لدينا : $تا\left(\frac{-ب}{2أ}\right) = أ\left(\frac{-ب}{2أ}\right)^2 + ب\left(\frac{-ب}{2أ}\right) + ح$

$$= \frac{4أح - ب^2}{4أ}$$

$\forall$ س $\in$ ح : $تا(س) - تا\left(\frac{-ب}{2أ}\right) = أس^2 + ب س + ح - \frac{4أح - ب^2}{4أ}$

$$= أس^2 + ب س + \frac{ب^2}{4أ}$$

$$= أ\left(س + \frac{ب}{2أ}\right)^2$$

إذن :

- إذا كان $أ > 0$ فإن : $\forall$ س $\in$ ح $تا(س) \geqslant تا\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$

$تا\left(\frac{-ب}{2أ}\right)$ **هي القيمة الصغرى للدالة تا**

ـ إذا كان $أ < 0$ فإن : $\forall$ س $\in$ ح تا (س) $\leqslant$ تا $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$

تا $\left(-\frac{ب}{2أ}\right)$ **هي القيمة العظمى للدالة تا**

• **دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |**

إذا حسبنا قيم تا (س) من أجل بعض القيم الكبيرة للعدد | س | نلاحظ أن قيم | تا (س) | تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون | س | كبيراً .

ويمكن التأكد من النتائج التالية :

ـ **إذا كان** $أ > 0$ فإن :

تا (س) $\leftarrow +\infty$ **عندما س** $\leftarrow +\infty$

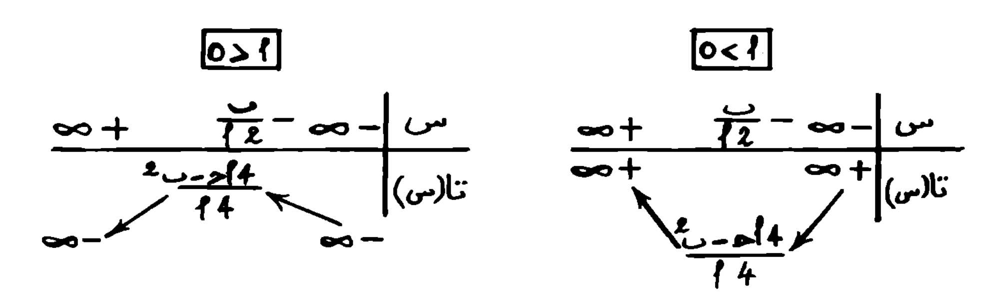
تا (س) $\leftarrow +\infty$ **عندما س** $\leftarrow -\infty$

ـ **إذا كان** $أ < 0$ فإن :

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow +\infty$

تا (س) $\leftarrow -\infty$ **عندما س** $\leftarrow -\infty$

• **جدول التغيرات** :



• **التمثيل البياني** :

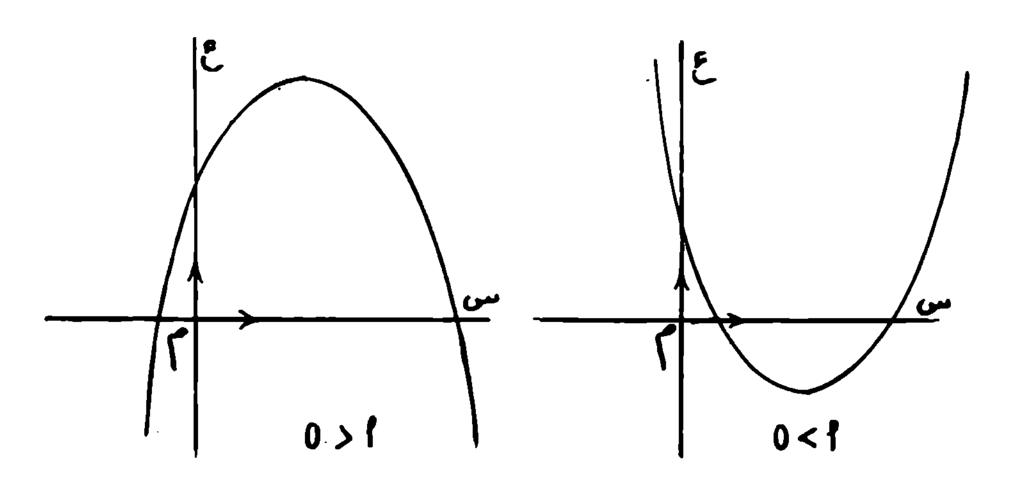
التمثيل البياني (γ) للدالة س $\mapsto$ أس^2 + ب س + حـ ($أ \neq 0$)

هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي حيث :

$س \in ح$ و $ع = ا س^2 + ب س + ح$ ($ا \neq 0$)

يسمى المنحني (γ) **قطعا مكافئا**

المنحنيان المرسومان في الشكلين التاليين هما تمثيلان بيانيان لدالتين من الشكل $س \mapsto ا س^2 + ب س + ح$ فى الحالتين $ا > 0$ و $ا < 0$



وفي المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ، المستقيم الذي معادلته

$$س = -\frac{ب}{2ا}$$ هو محور تناظر للمنحني (γ)

ويمكن التأكد من ذلك ، مثلا بإجراء تغيير للمعلم كما رأينا في المثال السابق .

والنقطة ى $\left(-\frac{ب}{2ا} ، \frac{4ا ح - ب^2}{4ا}\right)$ هي ذروة القطع المكافيء (γ)

الدالة س $\mapsto \frac{أ}{س}$ (أ $\neq 0$)	30

1 ـ دراسة الدالة تا : س $\mapsto \frac{1}{س}$

1.1 ـ مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة إذا وفقط إذا كان س $\neq 0$

ف$_{تا}$ = ح* =] $-\infty$ ، 0 [$\cup$] 0 ، $+\infty$ [

2.1 ـ اتجاه التغيّر :

س$_1$ و س$_2$ عددان مختلفان من نفس المجال

( ] $-\infty$ ، 0 [أو] 0 ، $+\infty$ [ )

لدينا :

$$\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\frac{1}{س_1} - \frac{1}{س_2}}{س_1 - س_2} = \frac{س_2 - س_1}{س_1 س_2 (س_1 - س_2)}$$

$$= - \frac{1}{س_1 س_2}$$

بما أن س$_1$ و س$_2$ لهما نفس الإشارة فإن :

س$_1$ س$_2$ > 0 و $\frac{تا(س_1) - تا(س_2)}{س_1 - س_2} < 0$

إذن :

الدالة تا متناقصة تماما على كلّ من المجالين] $-\infty$ ، 0 [و] 0 ، $+\infty$ [

3.1 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س |

نلاحظ في الجدول التالي :

س	10	10^2	10^3	10^4
$\frac{1}{\text{س}}$	0,1	0,01	0,001	0,0001

أن قيم تا (س) تكون قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون س كبيرا.
هل يمكن جعل تا (س) قريبا من الصفر بالقدر الذي نريده ؟ وبعبارة أخرى :

عندما يكون س كبيرا . هل يمكن جعل تا (س) موجباً وأصغر من أي عدد موجب تماما ε ؟

$$0 < \text{تا}(\text{س}) < \varepsilon \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{\text{س}} < \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \text{س} > \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

إذن للحصول على $0 < \text{تا}(\text{س}) < \varepsilon$ يكفي أخذ $\text{س} > \frac{1}{\varepsilon}$

(مثلا لكي يكون $0 < \text{تا}(\text{س}) < 10^{-9}$ يكفي أخذ $\text{س} > 10^{9}$)
ونعبر عن هذه الحالة بالقول :
إن تا (س) يؤول إلى الصفر عندما يؤول س إلى ما لا نهاية
ونكتب : $\text{تا}(\text{س}) \to 0$ عندما $\text{س} \to +\infty$

ومن جهة أخرى نلاحظ في الجدول التالي

س	-10^{1}	-10^{2}	-10^{3}	-10^{4}	-10^{5}
$\frac{1}{س}$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$	$-0,00001$

أن قيم تا (س) تكون كذلك قريبة من الصفر أكثر فأكثر بقدر ما يكون (– س) كبيرا

وبطريقة مماثلة يمكن التأكد من النتيجة التالية

– تا (س) ← 0 عندما – س ← + ∞

ونقول إن تا (س) يؤول الى الصفر عندما يؤول س إلى ناقص ما لا نهاية

ونكتب : تا (س) ← 0 عندما س ← – ∞

4.1 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم القريبة من الصفر للعدد | س |

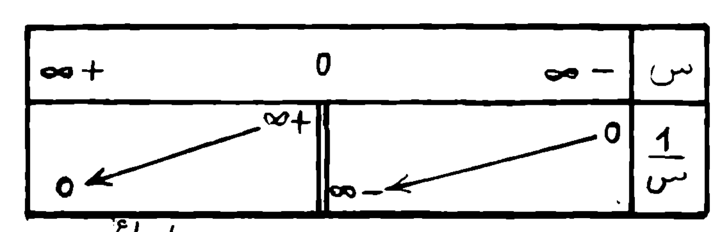
نلاحظ في الجدول التالي :

س	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}	-10^{-5}
$\frac{1}{س}$	-10	-10^{2}	-10^{3}	-10^{4}	-10^{5}

أن قيم | تا (س) | تكون كبيرة أكثر فأكثر بقدر ما يكون س قريبا من الصفر وبطريقة مماثلة كما سبق يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين :

- يؤول تا (س) إلى ما لا نهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم موجبة
  ونكتب : تا (س) ← + ∞ عندما س $\overset{>}{\leftarrow}$ 0
- يؤول تا (س) إلى ناقص ما لا نهاية عندما يؤول س إلى الصفر بقيم سالبة
  ونكتب : تا (س) ← – ∞ عندما س $\overset{<}{\leftarrow}$ 0

5.1 ـ جدول التغيرات :



س	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{س}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

6.1 ـ التمثيل البياني :

• في المستوي المنسوب إلى المعلم $(م ، \vec{و} ، \vec{ي})$ ، المنحني (γ) الممثل للدالة تا : س $\mapsto \frac{1}{س}$ هو مجموعة النقط ن (س ، ع) من المستوي

حيث س $\in$ ح* و ع $= \frac{1}{س}$

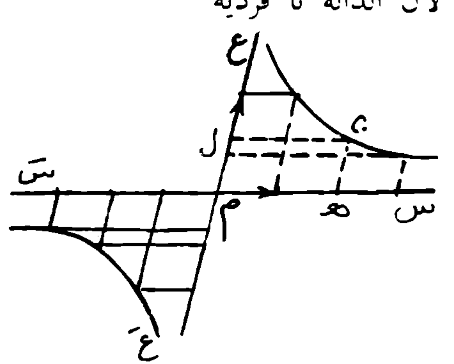
يسمى المنحني (γ) **قطعا زائدا**

ويتألف هذا المنحني من فرعين منفصلين لأن العدد 0 ليست له صورة بالدالة تا

• **مركز التناظر** :

المبدأ م هو مركز تناظر للمنحني (γ) لأن الدالة تا فردية

• المستقيمات المقاربة



إذا كانت ن نقطة من (γ) وَ هـ مسقطها على (س' س) وفق منحى (ع' ع) وَ ل مسقطها على (ع' ع) وفق منحى (س' س)

فإن :

الطول ح ه يؤول إلى الصفر عندما يؤول الطول م ه إلى ما لانهاية لأن :

تا (س) ← 0 عندما س ← + ∞

تا (س) ← 0 عندما س ← − ∞

نقول إن المستقيم (س′ س) مستقيم مقارب للمنحني (٦)

وكذلك :

يؤول الطول م ل إلى ما لا نهاية عندما يؤول الطول ل د إلى الصفر لأن

تا (س) ← + ∞ عندما س $\overset{>}{\leftarrow}$ 0

تا (س) ← − ∞ عندما س $\overset{<}{\leftarrow}$ 0

نقول إن المستقيم (ع′ ع) مستقيم مقارب للمنحني (٦)

2 ـ دراسة الدالة تا : س ↦ $\frac{\text{أ}}{\text{س}}$ (أ ≠ 0)

1.2 ـ مجموعة التعريف :

الدالة تا معرفة إذا وفقط إذا كان س ≠ 0

$ف_{تا}$ =] − ∞ ، 0 [∪] 0 ، + ∞ [

2.2 ـ اتجاه التغيّر :

$س_1$ وَ $س_2$ عددان مختلفان من نفس المجال

( ] − ∞ ، 0 [أو] 0 ، + ∞ [ )

لدينا :

$$\frac{\text{تا}(س_1) - \text{تا}(س_2)}{س_1 - س_2} = \frac{\frac{\text{أ}}{س_1} - \frac{\text{أ}}{س_2}}{س_1 - س_2} = \frac{\text{أ}(س_2 - س_1)}{س_1 س_2 (س_1 - س_2)}$$

$$= - \frac{أ}{س_1 س_2}$$

بما أن $س_1$ و $س_2$ لهما نفس الإشارة فإن إشارة النسبة

$\left(- \frac{أ}{س_1 س_2} \right)$ هي إشارة $(- أ)$

إذن :

- إذا كان $أ > 0$ فإن الدالة تا متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty ، 0[$ و $]0 ، +\infty[$
- إذا كان $أ < 0$ فإن الدالة تا متزايدة تماما على كلّ من المجالين $]-\infty ، 0[$ و $]0 ، +\infty[$

3.2 ـ دراسة الدالة تا من أجل القيم الكبيرة للعدد | س | و من أجل قيم س القريبة من الصفر

بدراسة مماثلة لدراسة الدالة $س \mapsto \frac{1}{س}$ نحصل على النتائج التالية :

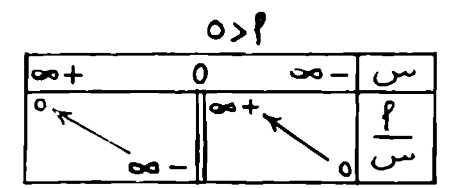
$أ > 0$	$أ < 0$
$\frac{أ}{س} \leftarrow 0$ عندما $س \leftarrow +\infty$	$\frac{أ}{س} \leftarrow 0$ عندما $س \leftarrow +\infty$
$\frac{أ}{س} \leftarrow 0$ عندما $س \leftarrow -\infty$	$\frac{أ}{س} \leftarrow 0$ عندما $س \leftarrow -\infty$
$\frac{أ}{س} \leftarrow +\infty$ عندما $س \overset{<}{\leftarrow} 0$	$\frac{أ}{س} \leftarrow -\infty$ عندما $س \overset{<}{\leftarrow} 0$
$\frac{أ}{س} \leftarrow -\infty$ عندما $س \overset{>}{\leftarrow} 0$	$\frac{أ}{س} \leftarrow +\infty$ عندما $س \overset{>}{\leftarrow} 0$

4.2 ـ جدول التغيرات :

أ > 0

س	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{أ}{س}$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

أ < 0



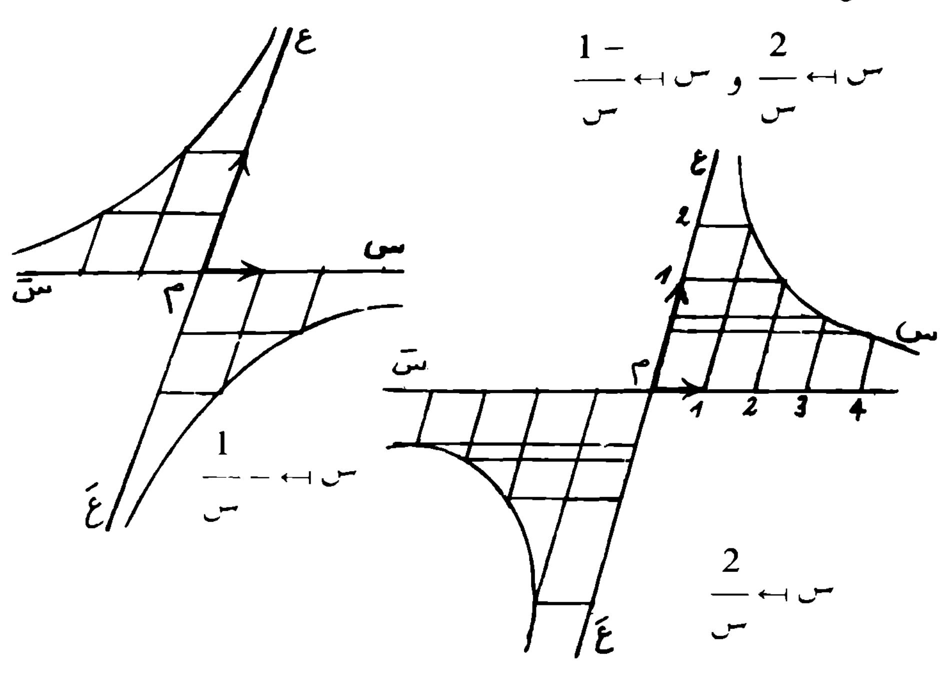
س	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{أ}{س}$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

5.2 ـ التمثيل البياني :

مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم أ فإن المنحني الممثل للدالة س ↦ $\frac{أ}{س}$ في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$) يسمى قطعا زائدا والمستقيمان (س' س) و (ع' ع) هما مستقيمان مقاربان لهذا القطع الزائد والمبدأ م هو مركز تناظره

يبيّن الشكلان التاليان المنحنين الممثلين للدالتين

س ↦ $\frac{2}{س}$ و س ↦ $\frac{-1}{س}$



تمارين

الدوال المذكورة في ما يلي هي دوال عددية لمتغير حقيقي

عموميات :

1. عيّن مجموعة تعريف كل دالة من الدوال التالية :

1) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س} + 4}{\text{س} - 2}$

2) $\text{س} \mapsto \dfrac{3\text{س} + 5}{\text{س}^2 - 4}$

3) $\text{س} \mapsto \dfrac{2\text{س} - 3}{2\text{س}^2 + \text{س}}$

4) $\text{س} \mapsto \dfrac{(\text{س} + 1)(\text{س} + 5)}{\text{س} + 1}$

5) $\text{س} \mapsto \sqrt{4 - \text{س}} + \sqrt{2\text{س} - 1}$

6) $\text{س} \mapsto \sqrt{\text{س} - 2} + \sqrt{\text{س} - 4}$

7) $\text{س} \mapsto \sqrt{\text{س}^2 + 2\text{س} - 24}$

8) $\text{س} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\text{س} - 1}}$

9) $\text{س} \mapsto \sqrt{\dfrac{\text{س}}{1 + \text{س}}}$

10) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س} + 2}{|\text{س}| + 3}$

11) $\text{س} \mapsto \dfrac{\text{س}}{\sqrt{|\text{س}|}}$

2. عيّن مجموعة تعريف الدالة تا المعرفة كما يلي :

$\text{تا}(\text{س}) = \dfrac{1}{\text{س}}$ إذا كان $\text{س} \neq 0$

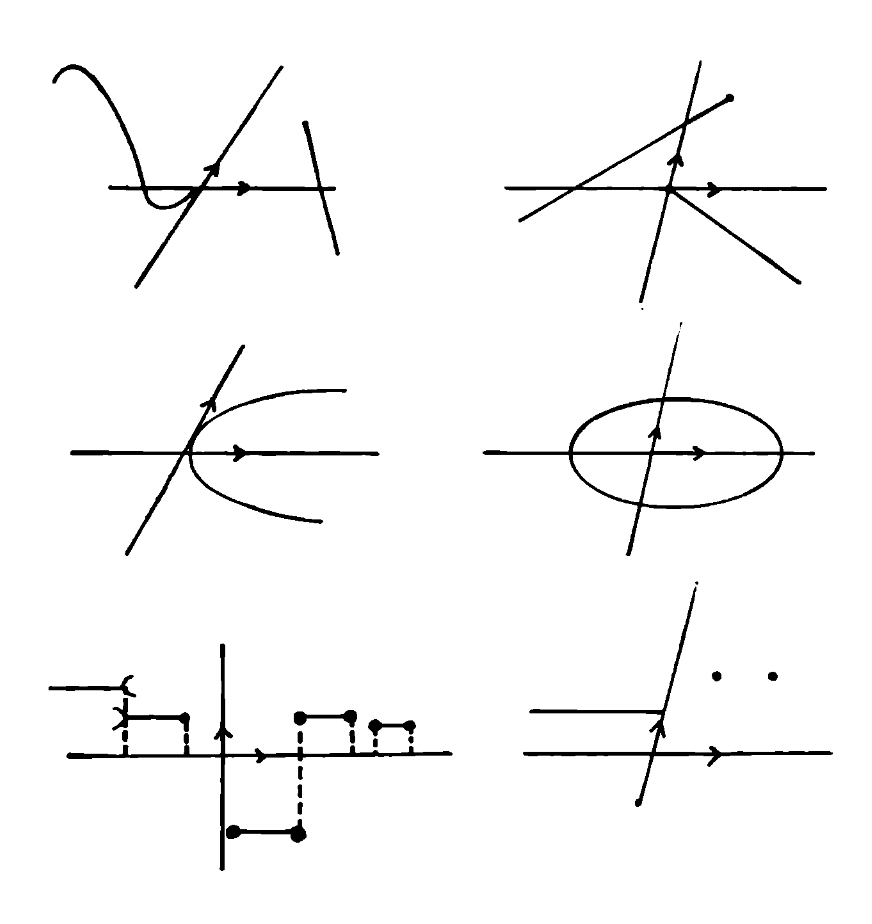
و $\text{تا}(0) = 0$

3) عيّن مجموعة تعريف الدالة ها المعرفة كما يلي :

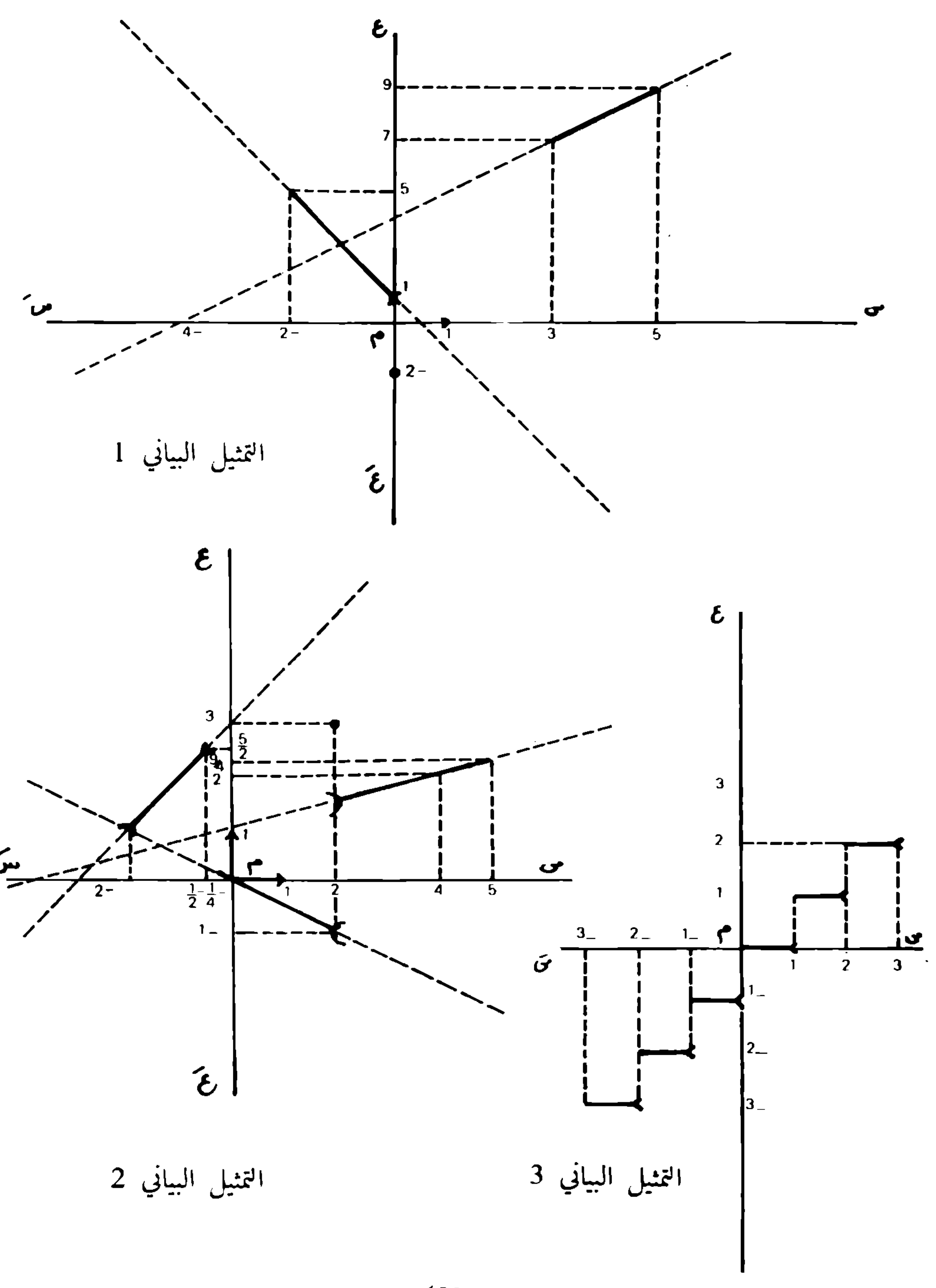
$$\text{ها}(\text{س}) = \frac{\text{س} - 1}{(\text{س} - 2)(\text{س} + 5)} \quad \text{إذا كان س} \in]-\infty \text{ ، } 2[$$

$$\text{و ها}(\text{س}) = 1 - \sqrt{\text{س} - 2} \quad \text{إذا كان س} \in [2 \text{ ، } +\infty[$$

4. هل التمثيلات التالية تمثيلات بيانية لدوال ؟



5. التمثيلات التالية تمثيلات بيانية لدوال يطلب تعيينها



التمثيل البياني 1

التمثيل البياني 2

التمثيل البياني 3

6. بيّن أن الدالة تا المعرفة كما يلي متزايدة على المجال ف في كل حالة من الحالات التالية :

تا (س) = 2 س + 5 ، ف = $[-3 ، 6]$

تا (س) = س^2 + 2 س − 3 ، ف = $[0 ، +\infty[$

تا (س) = $-\frac{1}{س}$ ، ف = $]-\infty ، -1]$

تا (س) = $\frac{1}{2 - س}$ ، ف = $[0 ، 2[$

تا (س) = س^3 ، ف = $]-\infty ، 0]$

تا (س) = $\sqrt{س}$ ، ف = $[0 ، 1]$

7. أثبت أن الدالة تا : س ↦ 4 س^2 + 1 متزايدة على $[2 ، 5]$ ومتناقصة على $[-1 ، 0]$ وأنها غير رتيبة على $[-2 ، 3]$.

8. دالتان تا وها معرفتان على مجال ف .

عا دالة معرفة على ف كما يلي :

∀ س ∈ ف عا (س) = تا (س) + ها (س) .

أثبت أنه :

1) إذا كانت تا و ها متزايدتين تماماً على ف ، فإن عا متزايدة تماماً على ف

2) إذا كانت تا و ها متناقصتين تماماً على ف ، فإن عا متناقصة تماماً على ف .

9. تا و ها دالتان معرفتان على مجال ف حيث :

∀ س ∈ ف تا (س) > 0 وَ ها (س) > 0

عا دالة معرفة على ف كما يلي :

∀ س ∈ ف ، عا (س) = تا (س) × ها (س) .

أثبت أنه :

1) إذا كانت تا و ها متزايدتين تماماً على ف ، فإن عا متزايدة تماماً على ف .

2) إذا كانت تا و ها متناقصتين تماماً على ف ، فإن عا متناقصة تماماً على ف

10. تا و ها دالتان معرفتان على مجال ف حيث :

$\forall$ س $\in$ ف تا (س) $>$ 0 و ها (س) $>$ 0 .

عا دالة معرفة على ف كما يلي :

$\forall$ س $\in$ ف عا (س) = تا (س) $\times$ ها (س) .

أدرس اتجاه تغير الدالة عا على ف ، في الحالتين التاليتين :

1) تا و ها متزايدتان تماماً على ف .

2) تا و ها متناقصتان تماماً على ف .

11. من بين الدوال التالية ، أذكر الدوال الفردية والدوال الزوجية

1) س $\mapsto$ س (س^2 – 5)   2) س $\mapsto \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 1}$ 3) س $\mapsto \frac{|\text{س}|}{\text{س}^2 + 1}$

4) س $\mapsto \frac{3\text{ س} - 1}{\text{س}^2 + 3}$ 5) س $\mapsto \frac{\text{س}^3 - 2\text{ س}}{2\text{ س}^3 + \text{س}}$ 6) س $\mapsto \frac{\text{س}^2 - 1}{\text{س}}$

7) س $\mapsto \frac{\text{س}^3 + \text{س}}{\text{س}^4 + \text{س}^2 + 1}$ 8) س $\mapsto \sqrt{\text{س}^2 - 4}$ 9) س $\mapsto \sqrt{\text{س}^2 + \text{س}}$

10) س $\mapsto \sqrt{\frac{\text{س} + 1}{\text{س} - 1}}$ 11) س $\mapsto \sqrt{\text{س}(\text{س} + 1)} + \sqrt{\text{س}(\text{س} - 1)}$

12) س $\mapsto |\text{س}| - 2$ 13) س $\mapsto |\text{س} + 2|$ 14) س $\mapsto \left|\frac{\text{س} - 1}{\text{س} + 1}\right|$

15) س $\mapsto \frac{|1 + \text{س}| - |1 - \text{س}|}{|1 + \text{س}| + |1 - \text{س}|}$

12. تا دالة معرفة على ح حيث :

∀ س ∋ ح : 3.تا (− س) + تا (س) = 4 س^3 + 2 س .

بيّن أن الدالة تا فردية ، ثم عيّنها

13. تا دالة معرفة على ح . عا و ها دالتان معرفتان على ح كما يلي :

∀ س ∋ ح عا (س) = $\frac{1}{2}$ [تا (س) + تا (− س)]

∀ س ∋ ح ها (س) = $\frac{1}{2}$ [تا (س) − تا (− س)]

1) أثبت أن الدالة عا زوجية وأن الدالة ها فردية

2) بين أن : ∀ س ∋ ح تا (س) = عا (س) + ها (س) .

14. دالة تا معرفة على مجال ف حيث ∀ س ∋ ف تا (س) ≠ 0 و (− س) ∋ ف

ها دالة معرفة على ف كما يلي :

∀ س ∋ ف ها (س) = $\frac{| \text{تا (س)} |}{\text{تا (|س|)}}$

بيّن أن الدالة ها زوجية في كل من الحالتين التاليتين :

1) تا زوجية 2) تا فردية

15. تا دالة زوجية معرفة على ح .

أثبت أنه إذا كانت تا متزايدة تماماً على [0 ، + ∞ [

فإنها متناقصة تماماً على] − ∞ ، 0]

16. تا دالة فردية معرفة على ح .

بيّن أنه إذا كانت تا متزايدة على [0 ، + ∞ [فإنها متزايدة على] − ∞ ، 0] .

الدوال التآلفية :

17. نعتبر الدالة تا : س ↦ 3 س

1) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :

تا (س) > 10^{8}

2) عيّن مجموعة الاعداد الحقيقية س بحيث يكون :

تا (س) < -10^{7}

18. نعتبر الدالة تا : س ↦ − 5 س

1) أوجد عدداً حقيقيا α بحيث يكون :

س < α ⇒ تا (س) > 10^{8}

هل α وحيد ؟

2) β عدد حقيقي موجب تماماً . عيّن عدداً حقيقياً α يحقق ما يلي :

س < α ⇒ تا (س) > β

19. شكل جدول التغيرات لكل دالة من الدوال التالية :

ثم ارسم تمثيلها البياني في معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) .

1) س ↦ 3 س + 1

2) س ↦ $-\frac{\text{س}}{2} + \frac{1}{4}$

3) س ↦ $\frac{\text{س}}{3} - \frac{1}{6}$

4) س ↦ $\frac{3}{2}\,\text{س} - \frac{1}{2}$

5) س ↦ − 5 س + 2

6) س ↦ $\frac{2}{5}\,\text{س} + \frac{1}{2}$

20. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.
أنشيء التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

1) $س \mapsto |س - 1|$
2) $س \mapsto |2 - س|$
3) $س \mapsto |2س + 3|$
4) $س \mapsto |س| + 3$
5) $س \mapsto -|2س| + 1$
6) $س \mapsto |3س| - 2$
7) $س \mapsto \sqrt{(س - 1)^2} + \sqrt{س^2}$
8) $س \mapsto \sqrt{(س + 1)^2} + |س - 2|$

21. المستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ى})$.
ي (س) هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي س
أنشيء التمثيل البياني لكل دالة من الدوال التالية :

1) $]-3 ، 3[\rightarrow ح$
$س \mapsto ي(س)$

2) $]-3 ، 3[\rightarrow ح$
$س \mapsto 2س - ي(ى)$

3) $]-3 ، 3[\rightarrow ح$
$س \mapsto -\frac{5}{2}س + ي(س)$.

22. المستوي منسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس .
(Δ_1) ، (Δ_2) ، (Δ_3) ، (Δ_4) ، (Δ_5) ، (Δ_6) مستقيمات معادلاتها ، على الترتيب :

1) $ع = -س + 1$
2) $ع = 2س + 3$
3) $ع = -2س$
4) $ع = \frac{1}{2}س + 1$
5) $ع = -\frac{1}{2}س + 2$
6) $ع = 2س + 5$

أذكر، من بين هذه المستقيمات ، المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة .

23. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .
(Δ) مستقيم معادلته ع = 2 س + 5 .
عيّن ، في كل حالة من الحالات التالية ، دالة تآلفية بحيث تمثيلها البياني :
1) يشمل النقطة ا (- 2 ، 1) وَ يوازي (Δ)
2) يشمل النقطة ب (- 1 ، 0) وَ يعامد (Δ) .
3) يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى محور الفواصل .
4) يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى محور الترتيب .

24. ا ب حـ مثلث. أقياس أضلاعه ، بالسنتيمترات هي :
ا ب = 5 ؛ ا حـ = 8 ؛ ب حـ = س .
ارسم التمثيل البياني للدالة س ↦ م (س) حيث
م (س) هو محيط المثلث ا ب حـ .

25. (Δ) مستقيم وَ (م ، $\overleftarrow{و}$) معلم له .
ا ، ب ، ﻫ ثلاث نقط من (Δ) فواصلها (- 2) ، (+ 1) ، (س) على الترتيب .
1) أحسب الأعداد الحقيقية تا (س) ، ها (س) ، عا (س) ، طا (س)
حيث : تا (س) = $\overline{\text{ﻫ ا}}$ + $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ؛ ها (س) = $\overline{\text{ﻫ ا}}$ - $\overline{\text{ﻫ ب}}$
عا (س) = ﻫ ا + ﻫ ب ؛ طا (س) = ﻫ ا - ﻫ ب
2) هل الدوال التالية تآلفية :
س ↦ تا (س) ؛ س ↦ ها (س) ؛ س ↦ عا (س)
س ↦ طا (س) .

26. نعتبر الدالتين الخطيتين ، تا : س ↦ ا س
ها : س ↦ ا′ س
نسمي (Δ) وَ (Δ′) التمثيلين البيانيين للدالتين تا ، ها ، على الترتيب ، في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ى}$) .
أثبت أن (Δ′) يكون نظير (Δ) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل إذا وفقط إذا كان
ا + ا′ = 0

27. المستوي منسوب إلى معلم متعامد (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) .
(Δ) وَ (Δ′) مستقيمان معادلتاهما ، على الترتيب ،
ع = ا س + ب وَ ع = ا′ س + ب′ .
كيف نختار الاعداد الحقيقية ا ، ا′ . ب . ب′ حتى يكون (Δ′) نظير (Δ)
بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

الدالة : س ↤ ا $س^2$ + ب س + حـ (ا ≠ 0)

28. تا هي الدالة : س ↤ 4 $س^2$ + 7 س + 5
1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب س يكون تا (س) > 4 $س^2$
2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :
إذا كان س أكبر من ا فإن تا (س) > 10^{20}

29. تا هي الدالة : س ↤ $س^2$ + 5 س − 8
1) بيّن أنه من أجل كلّ عدد حقيقي س أكبر من 2 يكون تا (س) > $س^2$
2) أوجد عددا حقيقيا موجبا ا بحيث :
إذا كان س أصغر من (− ا) فإن تا (س) > 10^{8}

30. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ي}$)
شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

1) س ↤ $س^2$ 2) س ↤ 2 $س^2$

3) س ↤ $\frac{1}{2}$ $س^2$ 4) س ↤ − $\frac{1}{3}$ $س^2$

5) س ↤ − 3 $س^2$ 6) س ↤ 2 $س^2$ + 3 س − 5

31. المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\vec{م ا}$ ، $\vec{م ب}$). نضع : $\vec{م ا}$ = $\vec{و}$ ، $\vec{م ب}$ = $\vec{ي}$
شكل جدول تغيرات الدالة : س ↤ $س^2$ + 2 س − 3 ثم أنشيء تمثيلها البياني
في كل حالة من الحالات التالية

1) $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ معلم متجانس

2) $\|\overleftarrow{و}\| = \|\overleftarrow{ي}\|$ وَ $\widehat{أ م ب} = 60°$

3) $\|\overleftarrow{و}\| = 2\|\overleftarrow{ي}\|$ وَ $(م أ) \perp (م ب)$

فيما يلي المستوى منسوب إلى المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

32. شكل جدول تغيرات كل من الدوال التالية وأنشيء تمثيلاتها البيانية

1) $ح \longrightarrow ح$

$س \mapsto س^2 - 4 س + 1$

2) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto 4 س^2 - 4 س + 1$

3) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto - س^2 - 2 س + 2$

33. ادرس كلّ دالة من الدوال التالية ثم أنشيء تمثيلها البياني

1) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto |س|^2 - 3|س| + 2$

2) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto |س^2 + س|$

3) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto |س^2 - س + 1|$

4) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto |- 2 س^2 - س + 4|$

5) $ح \leftarrow ح$

$س \mapsto \sqrt{(س^2 + 2 س)^2} + |س - 1|$

34. α عدد حقيقي و (ك) المنحني الممثل للدالة : $س \mapsto س^2 - α س + 1$

عين α حتي تنتمي النقطة أ (1 ، 4) إلى المنحني (ك) ثم أنشيء (ك)

35. α ، β عددان حقيقيان و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↦ α س^2 + β (س^2 − س) + 1

عين α و β حتى تنتمي النقطتان أ (1 ، 2) و ب (2 ، − 1) إلى المنحني (ك)

ثم أنشيء (ك)

36. α ، β ، δ أعداد حقيقية و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↦ α س^2 + β س + δ

عين α ، β ، δ حتى تنتمي النقط أ (1 ، 2) ، ب (− 1 ، − 2)

وَ جـ (− 3 ، 2) إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

37. α ، β ، δ أعداد حقيقية و (ك) المنحني الممثل للدالة :

س ↦ α س^2 + β س + δ

عين α ، β ، δ حتى تنتمي النقط أ (− 1 ، − 6) ، ب (1 ، 4)

وَ جـ (2 ، − 3) إلى المنحني (ك) . ثم أنشيء (ك)

38. تا وَ ها دالتان معرفتان كما يلي

تا : ح ← ح   ها : ح ← ح

س ↦ س^2 − 4   س ↦ س − 2

(ك) المنحني الممثل للدالة تا ، (Δ) المستقيم الممثل للدالة ها

عين إحداثيات نقط تقاطع (ك) وَ (Δ)

أنشيء (ك) وَ (Δ)

39. تا وَ ها دالتان معرفتان كما يلي :

تا : ح ← ح   ها : ح ← ح

س ↦ س^2 + 2 س − 3   س ↦ − س^2 − 3 س + 4

(ك) المنحني الممثل للدالة تا ، (ل) المنحني الممثل للدالة ها

1) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) مع الحاملين (س′س) و (ع′ع) للمحورين

2) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ل) مع (س′س) وَ (ع′ع)

3) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (ك) وَ (ل)

40. (ك) المنحني الممثل للدالة : تا : س ↦ $س^2$ – 2 س – 8

1) أكتب كثير الحدود تا (س) على شكله النموذجي
2) م′ نقطة إحداثياها (1-، – 9) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)
أكتب معادلة المنحني (ك) بالنسبة إلى المعلم (م′ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

41. ط عدد حقيقي وَ $ها_ط$ الدالة :
س ↦ ط $س^2$ – 2 (ط + 1) س + ط + 3
1) • عينّ مجموعة قيم ط بحيث تقبل المعادلة $ها_ط$ (س)=0 حلا واحدا

• عيّن مجموعة قيم ط بحيث يكون $ها_ط$ (2) = 0 أو $ها_ط \left(\frac{3}{2} \right) = 0$

• عيّن مجموعة قيم ط حتي يكون $ها_ط$ (1) = 0

2) عيّن ، حسب قيم العدد الحقيقي ك ، مجموعة الأعداد الحقيقية ط التي من أجلها تقبل الدالة $ها_ط$ قيمة صغرى تساوي ك
3)• أنشيء المنحنين الممثلين للدالتين $ها_0$ وَ $ها_{(-1)}$
• بيّن أن لهذين المنحنيين نقطة مشتركة يطلب حساب إحداثيها
4) أثبت أن المنحني الممثل للدالة $ها_ط$ يشمل نقطة إحداثياها مستقلان عن ط

42. [م ك ، م ل] زاوية قائمة ، ﻫ نقطة متغيرة من [م ك) تختلف عن م . أ نقطة ثابتة من [م ل) بحيث م أ = 4
(وحدة الطول هي السنتيمتر)
الدائرة التي تشمل النقطة أ وتمس المستقيم (م ك) في النقطة ﻫ تقطع [م ل) في النقطة ب .
نضع م ﻫ = س وَ م ب = ع
1) قارن بين الزاويتين [ﻫ أ ، ﻫ م] وَ [ب ﻫ ، ب م]
2) بيّن أن : $س^2$ = 4 ع
3) شكل جدول تغيّرات الدالة : س ↦ ع ثم أنشيء تمثيلها البياني

43. 1) أنشيء القطع المكافيء (ك) الذي معادلته : $ع = \frac{س^2}{2}$

2) ط عدد حقيقي حيث $ط > -\frac{1}{2}$

يتقاطع المنحني (ك) مع المستقيم (Δ) الذي معادلته ع = س + ط في النقطتين ﻫ وَ ﻫ′

أحسب بدلالة ط إحداثيي النقطة ي منتصف القطعة [ﻫ ﻫ′]

عيّن مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال $] -\frac{1}{2} ، + \infty [$

44. إذا سقط حجر سقوطا حرا فإنه يقطع في زمن ز مسافة قدرها 4.8 ز²

1) ما هو الزمن الذي استغرقه هذا الحجر إذا قطع في سقوطه 176.4م؟

2) ما هي المسافة التي قطعها هذا الحجر إذا استغرق في سقوطه زمنا قدره 7 ثا

الدالة : $س \mapsto \frac{أ}{س}$ $(أ \neq 0)$

45. تا هي الدالة $س \mapsto \frac{5}{2س}$

1) أوجد عددا حقيقيا موجبا α **بحيث يكون**

$س > α \Leftarrow 0 < تا (س) < 10^{-9}$

2) أوجد عددا حقيقيا موجبا β **بحيث يكون**

$س < β \Leftarrow - 10^{-9} < تا (س) < 0$

46. تا هي الدالة $س \mapsto -\frac{2}{5س}$

أوجد عددين حقيقيين موجبين α وَ β بحيث

1) $- α < س < 0 \Leftarrow تا (س) > 10^{7}$

2) $0 < س < β \Leftarrow تا (س) < - 10^{7}$

47. ادرس تغيرات كل دالة من الدوال التالية ثم أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

1) $س \mapsto \frac{-2}{س}$ 2) $س \mapsto \frac{1}{2س}$ 3) $س \mapsto \frac{-2}{3س}$

4) $س \mapsto \frac{3}{س}$ 5) $س \mapsto \frac{4}{3س}$ 6) $س \mapsto \frac{2.1}{س}$

48. ادرس وَ مثل بيانيا كلا من الدوال التالية

1) $س \mapsto \frac{1}{|س|}$ 2) $س \mapsto \frac{-2}{|س|}$ 3) $س \mapsto \frac{3}{2\sqrt{س^2}}$

49. مستوي منسوب إلى معلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$

(Δ) وَ (γ) هما التمثيلان البيانيان للدالتين

تا : $س \mapsto -س + 3$ ، هـ : $س \mapsto \frac{2}{س}$

1) عيّن إحداثيات نقط تقاطع (Δ) وَ (γ)

2) أنشيء في المعلم $(م ، \overleftarrow{و} ، \overleftarrow{ي})$ (Δ) وَ (γ)

50. نفس الأسئلة إذا كان :

تا : $س \mapsto 2س + 1$ ، ها : $س \mapsto \frac{-1}{س}$

51. نفس الأسئلة إذا كان :

تا : $س \mapsto 2س + 1$ ، ها : $س \mapsto \frac{1}{|س|}$

52. أدرس وَمثل بيانيا الدالة المعرفة كما يلي :

$تا(س) = \frac{2}{س}$ إذا كان $س < 0$

و $تا(0) = 0$

وَ $تا(س) = س + 1$ إذا كان $س > 0$

53. 1) أنشيء ، في المستوي المنسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) المنحني (γ) الممثل

للدالة : س ↤ $\frac{1}{2\ س}$

2) ط عدد حقيقي أكبر من 1 . (ف) مستقيم معادلته ع = $\frac{س}{2}$ + ط

عيّن إحداثيات نقط تقاطع (γ) وَ (ف)

3) نسمي ا و ب نقطتي تقاطع (γ) وَ (ف)

عيّن إحداثيي النقطة ي منتصف [اب]

ما هي مجموعة النقط ي عندما يتغير ط في المجال] 1 ، + ∞ [

54. 1) المستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

عيّن العددين الحقيقيين α وَ β حتى تنتمي النقطتان ا(− 1 ، 3)

و ب$\left(\frac{1}{2}\ ،\ -3\right)$ إلى المنحني (γ) الذي معادلته

ع = $\frac{\alpha}{س}$ + β

مَ نقطة إحداثياها (0 ، 1) في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

2) أُكتب معادلة المنحني (γ) في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

3) أنشيء (γ) في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

55. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط متغيرة في المستوي بحيث تكون هذه النقط رؤوس مثلث مساحته متر مربّع

أُحسب ، بالامتار ، الطول ع للضلع [اب] بدلالة الطول س للعمود المتعلق بالضلع [اب]

أُدرس الدالة س ↤ ع وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

56. (د) نصف دائرة قطرها [ا ب] حيث ا ب = 6 (يؤخذ السنتيمتر وحدة للأطوال)

(Δ_1) وَ (Δ_2) هما المماسان للقوس (د) في النقطتين ا ، ب على الترتيب .

ن نقطة متغيرة على (د) مختلفة عن ا وَ ب .

المماس (Δ) للقوس (د) في النقطة ن يقطع المماسين (Δ_1) وَ (Δ_2)

في النقطتين ك ، ل على الترتيب

نضع ا ك = س ، ب ل = ع

1) بيّن أن : س ع = 9

2) شكل جدول تغيرات الدالة س ↦ ع وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

57. مستوي منسوب إلى معلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$) . حاملا محوريه (س′ س) و (ع′ ع)

ط عدد حقيقي غير معدوم

س ع = 6 معادلة قطع زائد ؛ ن ، هـ نقطتان متمايزتان من هذا القطع الزائد

فاصلتاهما 3 ط ، $\frac{3}{2\ ط}$ على الترتيب

1) عيّن معادلة للمستقيم (ن هـ)

2) نسمي ا وَ ب نقطتي تقاطع المستقيم (ن هـ) مع (س′ س) وَ (ع′ ع)

أثبت أن للقطعتين [ا ب] و [ن هـ] نفس المنتصف ي وأن النقطة ي تتغير على مستقيم ثابت عندما يتغير ط في ح*

58. تحت درجة حرارة ثابتة ، جداء الضغط ض في الحجم ح لكتلة غازية معلومة ثابت

تملأ هذه الكتلة ، تحت درجة حرارة التجربة ، حجما قدره 30 سم^3 وتحت ضغط 1 بار

أُدرس الدالة ح ↦ ض وَ أنشيء تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ي}$)

الباب التاسع

الهندسة الفضائية

تعالج في هذا الباب المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية (المستويات ، المستقيمات ، وأوضاعها النسبية ، التوازي والتعامد في الفضاء)

تقدم هذه المفاهيم بطريقة بسيطة وبالاعتماد على رسومات وتمارين متنوعة تسمح للتلميذ تصور الأشكال في الفضاء .

31 المستويات والمستقيمات في الفضاء

1. الفضاء ، المستوي ، المستقيم

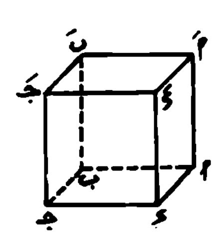
1.1 ـ الفضاء :

رأينا في السنوات السابقة كيف تمثل بعض الأجسام بالورق المقوى : المكعب ، الهرم ، متوازي المستطيلات ... هذه الأجسام أجزاء من الفضاء ، وكل نقطة من هذه الأجسام هي نقطة من الفضاء .

الفضاء هو مجموعة غير منتهية من النقط

2.1 ـ المستويات :

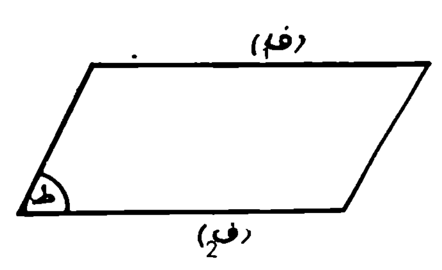
- طبقة ماء في حالة السكون تعطينا فكرة عن المستوي
- يمثل كل وجه من أوجه مكعب جزءا من مستوٍ مثلا ، الوجه اا' ء' ء في الشكل المجاور يمثل جزءاً من المستوي الذي يشمل النقط ا ، ا' ، ء' ، ء



الشكل 1

المستوي مجموعة غير منتهية من النقط وهو جزء من الفضاء يختلف عنه .

- يُمثَّل كل مستو (ط) بمتوازي أضلاع (الشكل 2)
- يُحدِد كل مستو (ط) جزئين منفصلين ($ف_1$) و ($ف_2$) من الفضاء حدّهما المستوي (ط) نسمي كلا من ($ف_1$) و ($ف_2$) نصف فضاء مفتوحا ويسمى كل من ($ف_1$) ∪ (ط) و ($ف_2$) ∪ (ط) نصف فضاء مغلقا



الشكل 2

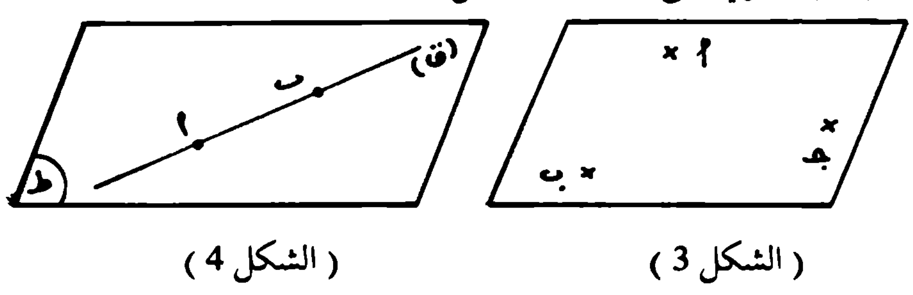
3.1 ـ المستويات والمستقيمات في الفضاء .

للمستويات والمستقيمات في الفضاء الخواص التالية:

1) إذا كانت أ ، ب نقطتين مختلفتين فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل النقطتين أ ، ب

2) إذا كانت أ ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فإنه يوجد مستو وحيد يشمل النقط أ ، ب ، ح (الشكل 3)

3) إذا كان لمستو (ط) ولمستقيم (ق) نقطتان مشتركتان مختلفتان فإن (ط) يحتوي على (ق).(الشكل 4)

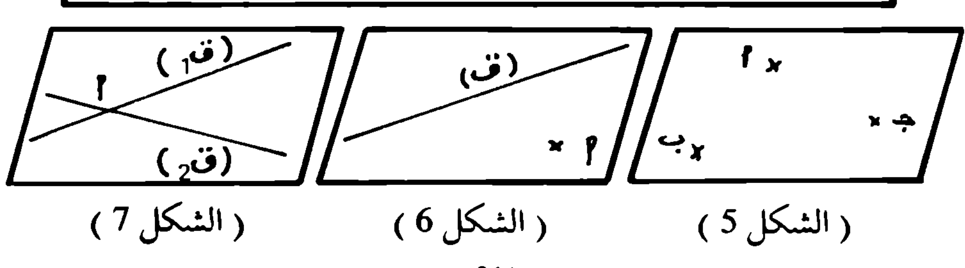


(الشكل 3)　　　(الشكل 4)

4.1 ـ تعين المستوي .

من الخواص السابقة نستنتج ما يلي :

> يكون مستو معيّنا بإعطاء :
>
> - ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة (الشكل 5)
> - مستقيم ونقطة لا تنتمي إلى هذا المستقيم (الشكل 6)
> - مستقيمين متقاطعين (الشكل 7)



(الشكل 5)　　　(الشكل 6)　　　(الشكل 7)

2 ـ الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو .

(ق) مستقيم و (ط) مستو.

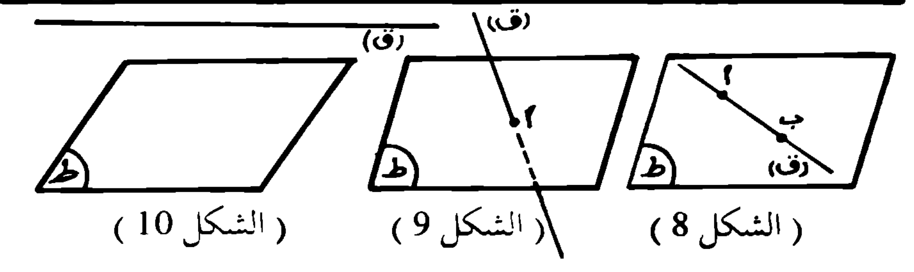
لدينا ثلاث حالات ممكنة

1) (ق) و (ط) لهما نقطتان مشتركتان . في هذه الحالة نقول إن (ق) محتو في (ط) . (الشكل 8)

2) (ق) و (ط) لهما نقطة مشتركة واحدة . في هذه الحالة نقول إن (ق) يقطع (ط) . (الشكل 9)

3) (ق) و (ط) ليست لهما أيّة نقطة مشتركة .

في هذه الحالة نقول إن (ق) و (ط) متوازيان تماما (الشكل 10)



(الشكل 10) (الشكل 9) (الشكل 8)

3 ـ الأوضاع النسبية لمستقيمين

($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمان في الفضاء .

لدينا الحالات التالية

1) ($ق_1$) و ($ق_2$) لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان :

فهما متطابقان

2) ($ق_1$) و ($ق_2$) لهما نقطة مشتركة واحدة : فهما متقاطعان

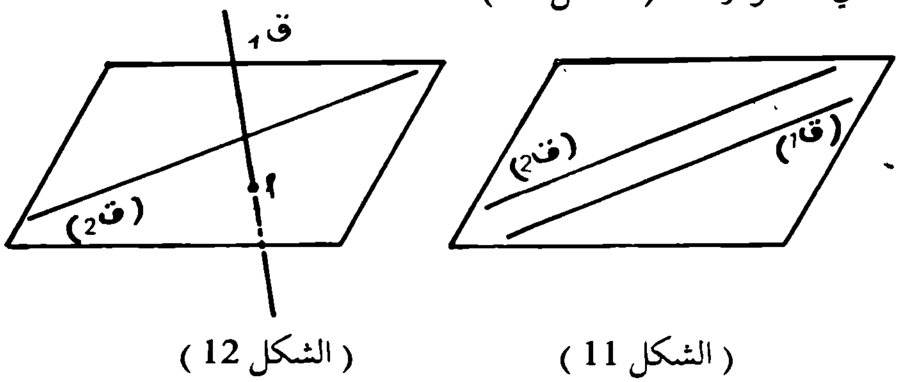
3) ($ق_1$) و ($ق_2$) ليست لهما أيّة نقطة مشتركة :

لتكن ا نقطة من ($ق_1$)

النقطة ا والمستقيم ($ق_2$) يعيّنان مستوياً (ط)

• إذا كان ($ق_1$) ⊃ (ط) نقول إن ($ق_1$) و ($ق_2$) متوازيان تماما (الشكل 11)

• إذا كان ($ق_1$) يقطع (ط) نقول إن ($ق_1$) و ($ق_2$) ليسا في مستو واحد (الشكل 12)



(الشكل 12) (الشكل 11)

خلاصة ما سبق :

إذا كان ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمين في الفضاء فإنهما • إما متطابقان • وإما متقاطعان • وإما متوازيان تماما • وإما ليسا في مستو واحد

4 ـ الأوضاع النسبية لمستويين

($ط_1$) و ($ط_2$) مستويان

• إذا كانت للمستويين ($ط_1$) و ($ط_2$) ثلاث نقط مشتركة ليست على استقامة واحدة فإن المستويين ($ط_1$) وَ ($ط_2$) متطابقان

• إذا كان ($ط_1$) و ($ط_2$) متمايزين وكانت لهما نقطتان مشتركتان متمايزتان أ و ب فإن تقاطعهما هو المستقيم (أب)
نقول إن ($ط_1$) و ($ط_2$) متقاطعان (الشكل 13)

• إذا كان المستويان ($ط_1$) و ($ط_2$) متمايزين وكانت لهما نقطة مشتركة أ فإن تقاطعهما هو مستقيم يشمل النقطة أ ونقول أيضا إنهما متقاطعان .

• إذا كان (ط$_1$) و (ط$_2$) منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما (الشكل 14)

(الشكل 14) (الشكل 13)

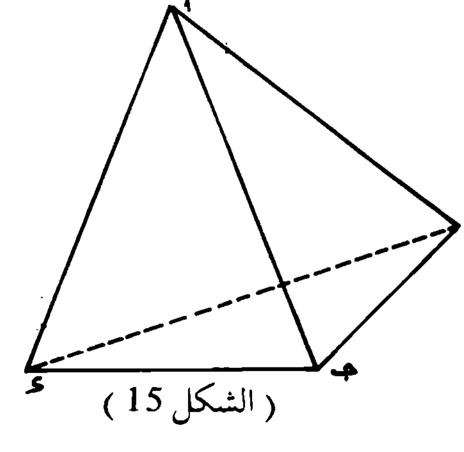
خلاصة ما سبق :

> إذا كان (ط$_1$) و (ط$_2$) مستويين فإنهما
> • إما متطابقان
> • وإما متقاطعان
> • وإما متوازيان تماما

5 ـ رباعي الوجوه :

أ ، ب ، ح ، د أربع نقط ليست في مستو واحد

تعيّن هذه النقط أربعة مستويات : (أ ب ح) ، (أ ح د) ، (أ ب د) ، (ب ح د) وتحدّد هذه المستويات الأربعة ، جسما يسمى **رباعي وجوه** (الشكل 15)



(الشكل 15)

النقط أ ، ب ، ح ، د هي رؤوسه

القطع [أ ب] ، [أ ح] ، [ب ح] ، [أ د] ، [ب د] ، [ح د] هي أحرفه

أجزاء المستويات المحددة بالمثلثات أ ب ح ، أ ح د ، أ ب د ، ب ح د ، هي وجوه رباعي الوجوه

تمرين محلول :

[م س) ، [م ع) ، [م ص) أنصاف مستقيمات ليست في مستو واحد . ا و ا' نقطتان متمايزتان من] م س)
ب و ب' نقطتان متمايزتان من] م ع) ، حـ و حـ' نقطتان متمايزتان من] م ص)

1) بيّن أن المستقيمين (ا ب) و (ا' ب') متقاطعان أو متوازيان

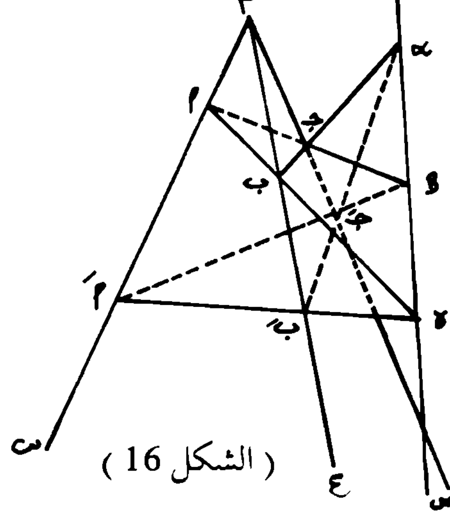
2) نفرض أن المستقيمات (ا ب) ، (ا حـ) ، (ب حـ) تقطع المستقيمات (ا' ب') ، (ا' حـ') ، (ب' حـ') في النقط δ ، β ، α على الترتيب

- أثبت أن النقط ا ، ب ، حـ تعيّن مستويا وأن النقط ا' ، ب' ، حـ' تعيّن مستويا وأن هذين المستويين مختلفان
- أثبت أن النقط الثلاث α ، β ، δ على استقامة واحدة

الحل :

1) المستقيمان المتقاطعان (م س) ، (م ع) يعيّنان مستويا . المستقيمان (ا ب) و (ا' ب') محتويان في هذا المستوي . فهما ، إذاً إما متقاطعان وإما متوازيان

2)• النقط ا ، ب ، حـ ليست على استقامة واحدة لأنه لو كانت حـ نقطة من (ا ب) لكانت جـ نقطة من المستوي (م ب ا) وبالتالي تكون المستقيمات (م ا) ، (م ب) ، (م حـ) في مستوٍ واحد وهذا يناقض الفرض



(الشكل 16)

وبنفس الطريقة يمكن الإثبات على أن أ′ ، ب′ ، حـ′ ليست على استقامة واحدة

إذن :

أ ، ب ، حـ تعيّن مستويا وَ أ′ ، ب′ ، حـ′ تعيّن مستويا آخر

- المستقيم (م أ) يقطع المستوي (أ ب حـ) في النقطة أ .

بما أن أ وَ أ′ مختلفتان فالنقطة أ′ لا تنتمي إلى المستوي (أ ب حـ)

إذن المستويان (أ ب حـ) و (أ′ ب′ حـ′) مختلفان .

- النقطة α تنتمي إلى المستقيمين (ب حـ) و (ب′ حـ′) فهي نقطة مشتركة للمستويين (أ ب حـ) و (أ′ ب′ حـ′)

كذلك النقطتان β و δ مشتركتان لهذين المستويين .

المستويان (أ ب حـ) وَ (أ′ ب′ حـ′) مختلفان ولهما نقطة مشتركة فهما متقاطعان وتقاطعهما مستقيم يشمل النقط α ، β ، δ

إذن : α ، β ، δ على استقامة واحدة .

32 التـوازي في الفضـاء

1 ـ المستقيمات المتوازية

1.1 ـ تعريف

> يتوازى مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كانا متطابقين أو كانا في مستوٍ واحد ومنفصلين

- إذا توازى مستقيمان وكانا منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما
- في الهندسة المستوية إذا كان مستقيمان منفصلين فإنهما متوازيان ، بينما في الهندسة الفضائية هذا غير صحيح إذ يمكن أن يكون مستقيمان منفصلين دون أن يكونا متوازيين
- مستقيمان متوازيان تماما يعيّنان مستويا .

2.1 ـ نظرية 1

> إذا كان (ق) مستقيما وكانت ا نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يشمل ا ويوازي (ق)

البرهان

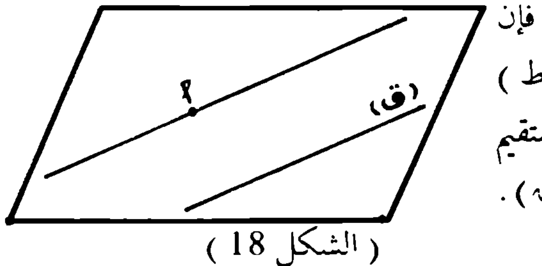
بالفعل

- إذا كانت $ا \in$ (ق) فإن (ق) هو المستقيم الوحيد الذي يشمل ا ويوازي (ق) .

ا
(ق)

(الشكل 17)

- إذا كانت $ا \notin$ (ق) فإن (ق) و ا يعيّنان مستويا (ط) ونعلم أنه يوجد في (ط) مستقيم وحيد يشمل ا ويوازي (ق).



(الشكل 18)

3.1 ـ نظرية 2

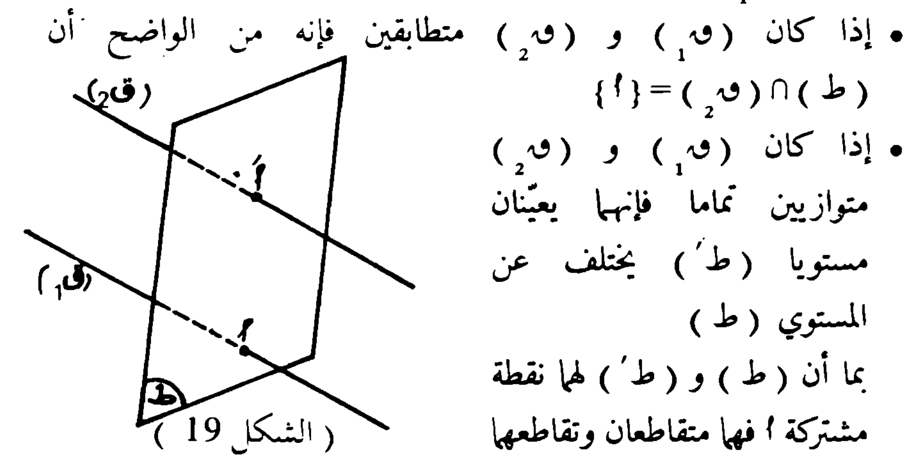
> إذا كان (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمين متوازيين وكان (ط) مستويا يقطع (ق$_1$) فإن (ط) يقطع أيضا (ق$_2$)

البرهان :

(ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمان متوازيان و (ط) مستو حيث

(ط) ∩ (ق$_1$) = { أ }

- إذا كان (ق$_1$) و (ق$_2$) متطابقين فإنه من الواضح أن (ط) ∩ (ق$_2$) = { أ }



(الشكل 19)

- إذا كان (ق$_1$) و (ق$_2$) متوازيين تماما فإنهما يعيّنان مستويا (ط') يختلف عن المستوي (ط)

بما أن (ط) و (ط') لهما نقطة مشتركة أ فهما متقاطعان وتقاطعهما هو مستقيم (Δ) يقطع (ق$_2$) في النقطة أ' لأن (Δ) يقطع (ق$_1$) و (ق$_1$) // (ق$_2$) والنقطة أ' مشتركة بين المستقيم (ق$_2$) والمستوي (ط).

إذن المستوي (ط) يقطع المستقيم (ق$_2$) في النقطة أ'

4.1 ـ نظرية 3

> (ق$_1$) ، (ق$_2$) و (ق$_3$) ثلاثة مستقيمات في الفضاء .
> إذا كان (ق$_1$) يوازي (ق$_2$)' وكان (ق$_2$) يوازي (ق$_3$) فإن (ق$_1$) يوازي (ق$_3$) .

البرهان :

(ق$_1$) ، (ق$_2$) و (ق$_3$) ثلاثة مستقيمات في الفضاء

حيث (ق$_1$) // (ق$_2$) و (ق$_2$) // (ق$_3$)

لندرس وضعية (ق$_3$) بالنسبة إلى (ق$_1$) .

لدينا حالتان ممكنتان : [(ق$_1$) و (ق$_3$) منفصلان] و[(ق$_1$) و (ق$_3$) غير منفصلين] .

الحالة الأولى : (ق$_1$) و (ق$_3$) غير منفصلين

لتكن أ نقطة مشتركة بين المستقيمين (ق$_1$) و (ق$_3$)

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل أ ويوازي (ق$_2$) .

بما أن المستقيمين (ق$_1$) و (ق$_3$) يشملان النقطة أ ويوازيان (ق$_2$) فهما متطابقان .

الحالة الثانية : (ق$_1$) و (ق$_2$) منفصلان .

لتكن أ نقطة من (ق$_1$) و (ط) المستوي المعيّن بالمستقيم (ق$_3$) وبالنقطة أ

حسب النظرية السابقة لو كان (ط) يقطع (ق$_1$) لكان يقطع (ق$_2$) وبالتالي يقطع (ق$_3$) وهذا يناقض الفرض : (ق$_3$) ⊂ (ط)

إذن (ق$_1$) محتوي في (ط)

بما أن المستقيمين (ق$_1$) و (ق$_3$) منفصلان ومن نفس المستوي (ط) فهما متوازيان تماما .

(الشكل 20)

2 ـ المستويات والمستقيمات المتوازية

1.2 ـ تعريف :

يكون مستقيم (ى) ومستو (ط) متوازيين إذا وفقط إذا كان (ط) و (ى) منفصلين أو كان (ى) محتويا في (ط) .

إذا كان المستقيم (ى) والمستوي (ط) منفصلين نقول إنهما متوازيان تماما

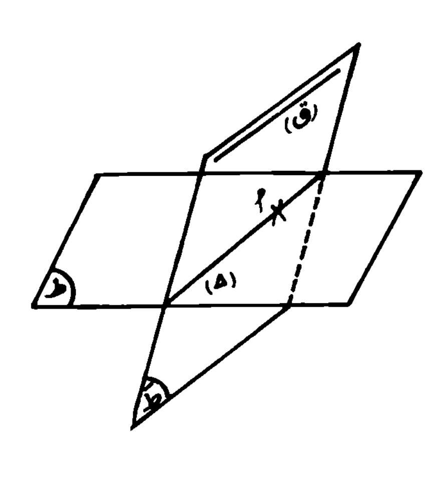
2.2 ـ شرط توازي مستقيم ومستوٍ :

يكون مستقيم (ى) موازيا لمستو (ط) إذا وفقط إذا كان (ى) موازيا لمستقيم من المستوي (ط)

البرهان :

- إذا كان (ى) ⊂ (ط) فإن النظرية واضحة
- نفرض فيما يلي أن (ى) غير محتو في (ط)

1) نفرض أن (ى) يوازي (ط)
ونبرهن أنه يوجد في المستوي (ط) مستقيم يوازي (ى) .
لتكن ا نقطة من (ط) . (ى) و ا يعيّنان مستويا (طَ) يختلف عن (ط) وتقاطع (ط) و (طَ) هو مستقيم (Δ) .
(ى) و (Δ) من نفس المستوي (طَ) وهما منفصلان لأن (ى) و (ط) متوازيان تماما وبالتالي (ى) و (Δ) متوازيان تماما .



(الشكل 21)

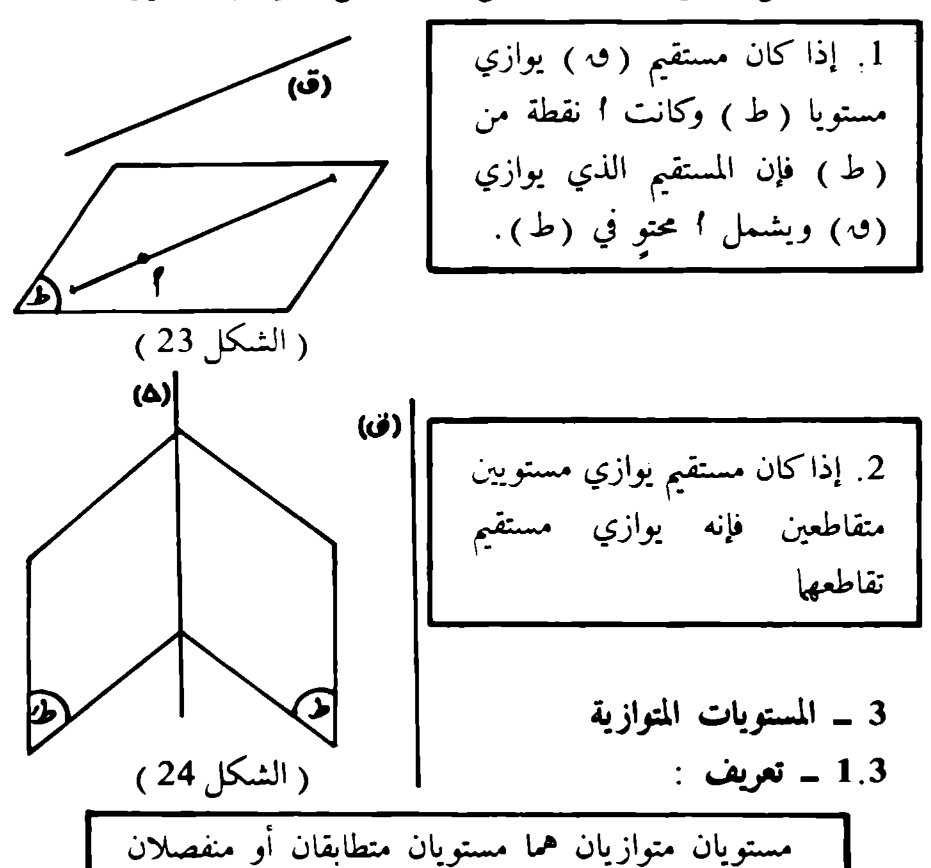
2) نفرض أنه يوجد في المستوي (ط) مستقيم (ه') يوازي المستقيم (ه) ونبرهن أن (ه) يوازي (ط).

لو كان (ط) يقطع (ه) لكان أيضا يقطع (ه') [لأن (ه) // (ه')] وهذا يناقض الفرض (ه') ⊂ (ط) إذن (ه) و (ط) متوازيان

(الشكل 22)

3.2 ـ نتائج :

انطلاقا من النظرية السابقة يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين



1. إذا كان مستقيم (ه) يوازي مستويا (ط) وكانت ا نقطة من (ط) فإن المستقيم الذي يوازي (ه) ويشمل ا محتوٍ في (ط).

(الشكل 23)

2. إذا كان مستقيم يوازي مستويين متقاطعين فإنه يوازي مستقيم تقاطعهما

(الشكل 24)

3 ـ المستويات المتوازية

1.3 ـ تعريف :

مستويان متوازيان هما مستويان متطابقان أو منفصلان

2.3 ـ شرط توازي مستويين :

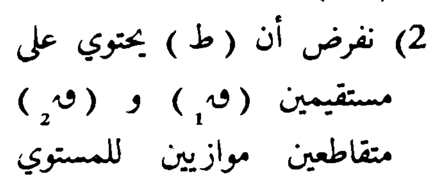
> يتوازى مستويان إذا وفقط إذا احتوى أحدهما على مستقيمين متقاطعين وموازيين للمستوي الاخر

البرهان :

- إذا كان المستويان متطابقين فإن النظرية واضحة .
- نفرض فيما يلي أن المستويين (ط) و (ط′) مختلفان .

1) إذا كان (ط) و (ط′) متوازيين فإن كل مستقيم من (ط) يوازي (ط′) .

إذن (ط) يحتوي ، على الأقل ، على مستقيمين متقاطعين يوازيان (ط′) .



2) نفرض أن (ط) يحتوي على مستقيمين (ق$_1$) و (ق$_2$) متقاطعين موازيين للمستوي (ط′) ونبرهن أن (ط) و (ط′) متوازيان .

لو كان (ط) و (ط′) متقاطعين لكان تقاطعهما مستقيما (Δ) .

من (ق$_1$) // (ط) ومن (ق$_1$) // (ط′)

(الشكل 25)

نستنتج أن (ق$_1$) // (Δ)

كذلك ، من (ق$_2$) // (ط) وَ من (ق$_2$) // (ط′)

نستنتج أن (ق$_2$) // (Δ) ويكون ،

عندئذ ، (ق$_1$) // (ق$_2$) وهذا يناقض

الفرض : (ق$_1$) و (ق$_2$) متقاطعان .

إذن (ط) و (ط′) متوازيان .

3.3 ـ نظرية :

إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستوٍ وحيد (ط′) يوازي (ط) ويشمل م

البرهان :

• **وجود (ط′) :**

ليكن ($ق_1$) و ($ق_2$) مستقيمين متقاطعين من المستوي (ط).

المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) اللذان يشملان النقطة م ويوازيان ($ق_1$) و ($ق_2$) متقاطعان فهما يعيّنان مستويا (ط′) يوازي (ط)

(الشكل 26)

• **وحدانية (ط′) :**

نفرض أنه يوجد مستوٍ (ط″) يختلف عن (ط′) ويشمل م ويوازي (ط).

المستويان (ط′) و (ط″) متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (Δ)

المستقيمان المتقاطعان ($ق_1$) و ($ق_2$) من (ط) يوازيان (Δ) لأن كلاً منهما يوازي (ط′) و (ط″) وهذا تناقض لأنه لا يوجد مستقيم يوازي مستقيمين متقاطعين

إذن (ط′) و (ط″) متطابقان وبالتالي (ط′) وحيد

4.3 ـ نظرية :

($ط_1$) ، ($ط_2$) ، ($ط_3$) ثلاثة مستويات

إذا كان ($ط_1$) يوازي ($ط_2$) وكان ($ط_2$) يوازي ($ط_3$)

فإن ($ط_1$) يوازي ($ط_3$)

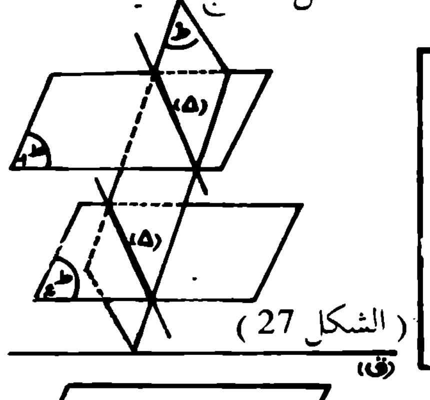
البرهان :

نفرض أن (ط$_1$) و (ط$_3$) متقاطعان ولتكن أ نقطة مشتركة بينهما.
المستويان (ط$_1$) و (ط$_3$) مختلفان ويشملان النقطة أ ويوازيان المستوي (ط$_2$)
وهذا تناقض مع النظرية السابقة إذن (ط$_1$) و (ط$_3$) متوازيان

5.3 ـ نتائج :

انطلاقا من النظريات السابقة يمكن التأكد من النتائج التالية

1. إذا كان (ط$_1$) و (ط$_2$) مستويين متوازيين وكان (ط) مستويا يقطع (ط$_1$) فإن (ط) يقطع (ط$_2$). مستقيما تقاطعهما متوازيان.



(الشكل 27)

2. إذا كان (ط$_1$) و (ط$_2$) مستويين متوازيين وكان (ق) مستقيما يوازي (ط$_1$) فإن (ق) يوازي (ط$_2$)

(الشكل 28)

3. إذا كان (ط$_1$) و (ط$_2$) مستويين متوازيين وكان (ق) مستقيماً يقطع (ط$_1$) فإن (ق) يقطع (ط$_2$).

(الشكل 29)

تمرين محلول :

ا ب ح د رباعي وجوه ، ا′، ب′، ح′ منتصفات القطع [ب ح] ، [ا ح] و [ا د] على الترتيب

1) أثبت أن المستوي المعيّن بالنقط ا′ ، ب′ ، ح′ يوازي المستقيمين (ا ب) و (ح د)

2) أثبت أن المستوي (ا′ ب′ ح′) يقطع الحرف [ب د] في نقطة (د′) وأن الرباعي ا′ ب′ ح′ د′ متوازي أضلاع

الحل :

1) في المثلث ا ب ح لدينا ا′ منتصف [ب ح] و ب′ منتصف [ا ح] .

نعلم في هذه الحالة أن (ا′ ب′) // (ا ب)

إذن (ا ب) يوازي المستوي (ا′ ب′ ح′)

لأنه يوازي المستقيم (ا′ ب′) من هذا المستوي

كذلك لدينا (ب′ ح′) // (ح د)

إذن (ح د) يوازي المستوي (ا′ ب′ ح′)

(الشكل 30)

2) لنبرهن أن المستوي (ا′ ب′ ح′) يقطع المستقيم (ب د).

لو كان (ب د) يوازي (ا′ ب′ ح′) لكان المستويان (ا ب د) و (ا′ ب′ ح′) متوازيين لأن (ا ب) يوازي (ا′ ب′ ح′)

ومن (حـ ى) يوازي (اَ بَ حـَ) نستنتج أن (حـ ى) يوازي (ا ب ى)
وهذا يعني أن ا ، ب ، حـ ، ى تنتمي إلى مستو واحد وهذا تناقض.
إذن (اَ بَ حـَ) يقطع (ب ى) في نقطة ىَ .
لنبرهن أن ىَ هي منتصف [ب ى] .
المستويان (اَ بَ حـَ) و (ب حـ ى) متقاطعان وتقاطعهما هو المستقيم (اَ ىَ)
المستقيم (حـ ى) يوازي كلا من المستويين (اَ بَ حـَ) و (ب حـ ى)
فهو إذا يوازي تقاطعهما (اَ ىَ)
في المثلث ب حـ ى لدينا : اَ منتصف [ب حـ] و (اَ ىَ) // (حـ ى)
وهذا يعني أن ىَ هي منتصف [ب ى]
بما أن حـَ منتصف [ا ى] و ىَ منتصف [ب ى] فإن (حـَ ىَ) // (ا ب) .
ومن جهة أخرى لدينا :
(اَ بَ) // (ا ب) و (بَ حـَ) // (حـ ى) و (اَ ىَ) // (حـ ى)
ومنه : (اَ بَ) // (حـَ ىَ) و (اَ ىَ) // (بَ حـَ)
إذن اَ بَ حـَ ىَ متوازي أضلاع .

33	التعامد في الفضاء

1 ـ المستقيمات المتعامدة في الفضاء

1.1 ـ تعريف :

(و$_1$) و (و$_2$) مستقيمان في الفضاء و م نقطة من الفضاء .
نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (Δ_1) يوازي (و$_1$) ويشمل م .
كذلك يوجد مستقيم وحيد (Δ_2) يوازي (و$_2$) ويشمل م .
عندما يكون المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) متعامدين نقول إن (و$_1$) و (و$_2$) متعامدان في الفضاء .

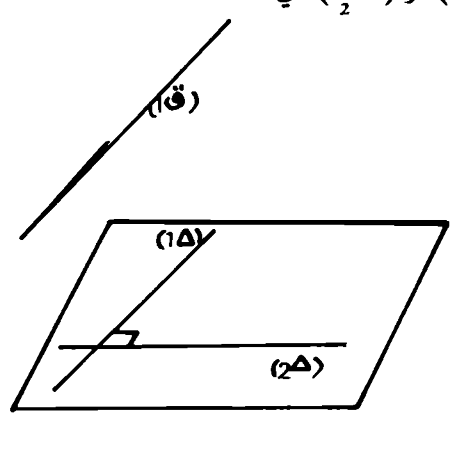
التعريف :

يتعامد ، في الفضاء ، مستقيمان (و$_1$) و (و$_2$) إذا وفقط إذا كانا موازيين لمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) متقاطعين ومتعامدين

الترميز : إذا تعامد مستقيمان (و$_1$) و (و$_2$) في الفضاء نكتب : (و$_1$) $\perp$ (و$_2$)

ملاحظة :

في الهندسة الفضائية يمكن لمستقيمين أن يكونا متعامدين دون أن يكونا متقاطعين بينما في الهندسة المستوية إذا تعامد مستقيمان فإنهما يتقاطعان .



(الشكل 31)

2.1 ـ نتائج :

يمكن التأكد من النتيجتين التاليتين

1) $(\mathcal{D}_1)$ و $(\mathcal{D}_2)$ مستقيمان متعامدان في الفضاء .

مهما كانت النقطة م من الفضاء فإن المستقيمين اللّذين يشملان م

ويوازيان $(\mathcal{D}_1)$ و $(\mathcal{D}_2)$ متعامدان

2) $(\mathcal{D}_1)$ ؛ $(\mathcal{D}_2)$ و (Δ) ثلاثة مستقيمات في الفضاء .

إذا كان $(\mathcal{D}_1) // (\mathcal{D}_2)$ وكان $(\Delta) \perp (\mathcal{D}_1)$ فإن $(\Delta) \perp (\mathcal{D}_2)$

2 ـ المستقيمات والمستويات المتعامدة

1.2 ـ نظرية وتعريف :

(Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ)

يوجد في كل مستو يحتوي على (Δ) مستقيم وحيد يعامد (Δ) في م

ليكن $(\mathcal{D}_1)$ و $(\mathcal{D}_2)$ مستقيمين متقاطعين في م ويعامدان (Δ)

يعيّن هذان المستقيمان مستويا (ط)

لنبرهن أن (Δ) يعامد كل مستقيم من (ط)

ليكن $(\mathcal{D})$ مستقيما من (ط)

لدينا حالتان : $(\mathcal{D})$ يشمل م ، $(\mathcal{D})$ لا يشمل م

• **الحالة الأولى : $(\mathcal{D})$ يشمل م :**

لتكن ا و ا′ نقطتين مختلفتين من (Δ) ومتناظرتين بالنسبة إلى م وليكن $(\mathcal{D}')$ مستقيما من (ط) يقطع المستقيمات $(\mathcal{D}_1)$ ، $(\mathcal{D}_2)$ و $(\mathcal{D})$ في النقط ب ، حـ ، ى على الترتيب

لدينا :

ا ب = ا′ ب (لأن $(\mathcal{D}_1)$ محور [ا ا′] في المستوي (ا ب ا′))

ا حـ = ا′ حـ (لأن $(\mathcal{D}_2)$ محور [ا ا′] في المستوي (ا حـ ا′))

المثلثان ا ب حـ و ا′ ب حـ متقايسان

وبالتالي :

$\widehat{ا ب حـ} = \widehat{ا′ ب حـ}$

أي $\widehat{ا ب د} = \widehat{ا′ ب د}$

من $\widehat{ا ب د} = \widehat{ا′ ب د}$

و ا ب = ا′ ب

نستنتج أن المثلثين ا ب د و ا′ ب د متقايسان وبالتالي ا د = ا′ د .

المثلث د ا ا′ متساوي الساقين

والمستقيم (م د) هو متوسطه

المتعلق بالقاعدة [ا ا′] فهو إذاً عمودي على (ا ا′) (الشكل 32)

إذن (Δ) يعامد (ف)

• **الحالة الثانية : (ف) لا يشمل م**

يوجد في المستوي (ط) مستقيم (ف″) يشمل م ويوازي (ف) .

حسب الحالة السابقة (Δ) يعامد (ف″)

وبما أن (ف) يوازي (ف″) فإن (Δ) يعامد (ف)

ومنه النظرية والتعريف التاليين

نظرية :

إذا كان مستقيم (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من مستو (ط) فإن (Δ) عمودي على كل المستقيمات من (ط)

تعريف :

نقول إن المستقيم (Δ) عمودي على المستوي (ط) إذا وفقط إذا كان (Δ) عموديا على كل المستقيمات من (ط)

إذا كان (Δ) عموديا على (ط) نقول أيضا إن (ط) عمودي على (Δ)

2.2 ـ شرط تعامد مستقيم ومستو :

من النظرية والتعريف السابقين نستنتج النظرية التالية

نظرية :

يكون مستقيم (Δ) عموديا على مستو (ط) إذا وفقط إذا كان (Δ) عموديا على مستقيمين متقاطعين من (ط)

3.2 ـ نظريات :

يمكن التأكد من النظريتين التاليتين (انظر إلى التمرين رقم 38 والتمرين رقم 39)

نظرية 1 :

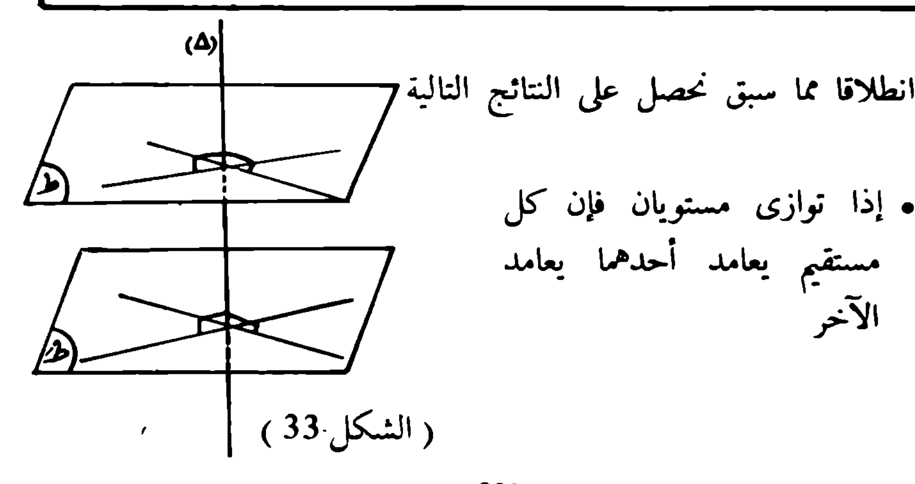
إذا كان (Δ) مستقيما وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستو وحيد يعامد (Δ) ويشمل م

نظرية 2 :

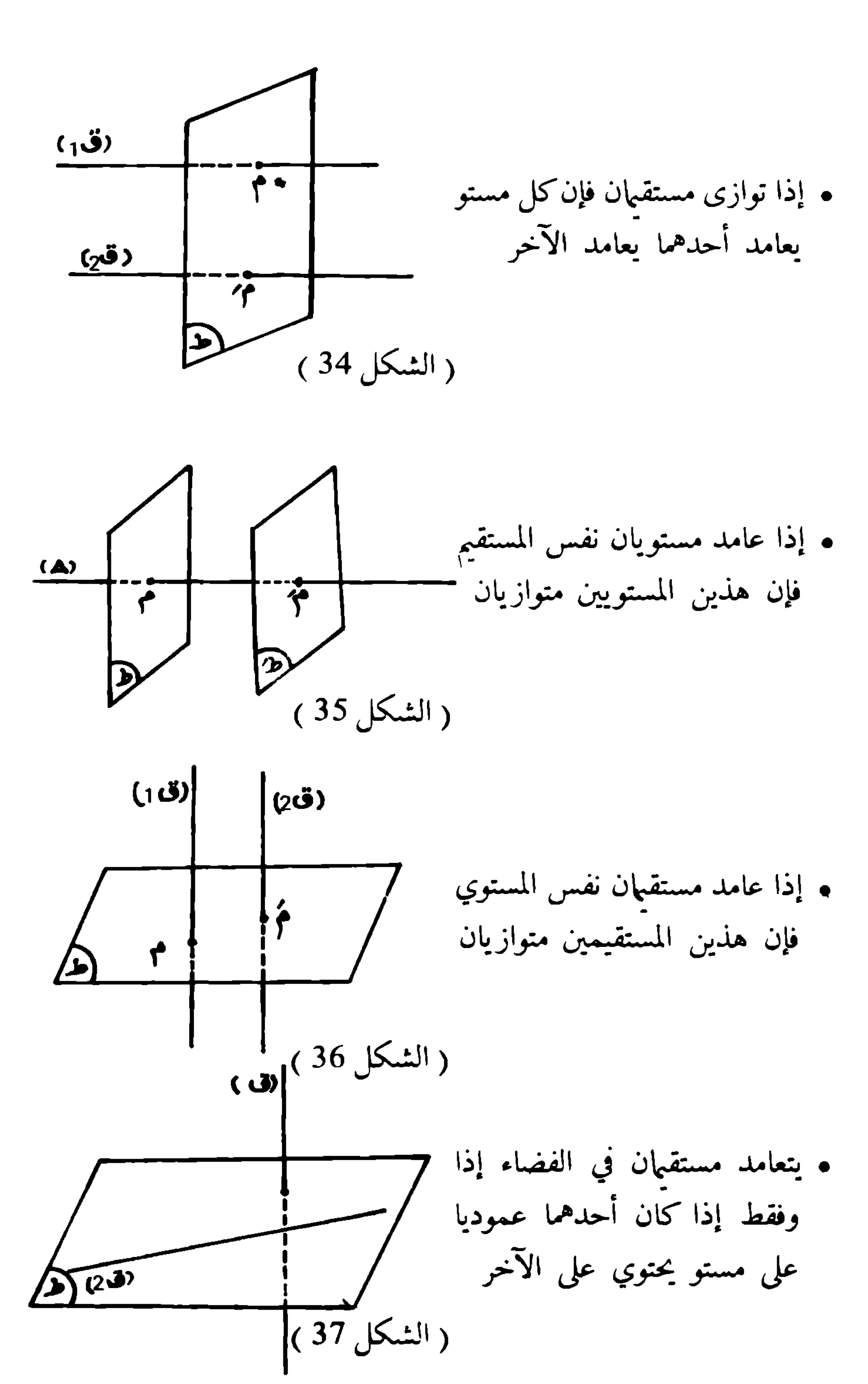
إذا كان (ط) مستويا وكانت م نقطة من الفضاء فإنه يوجد مستقيم وحيد يعامد (ط) ويشمل م

انطلاقا مما سبق نحصل على النتائج التالية

- إذا توازى مستويان فإن كل مستقيم يعامد أحدهما يعامد الآخر



(الشكل 33)



- إذا توازى مستقيمان فإن كل مستو يعامد أحدهما يعامد الآخر

(الشكل 34)

- إذا عامد مستويان نفس المستقيم فإن هذين المستويين متوازيان

(الشكل 35)

- إذا عامد مستقيمان نفس المستوي فإن هذين المستقيمين متوازيان

(الشكل 36)

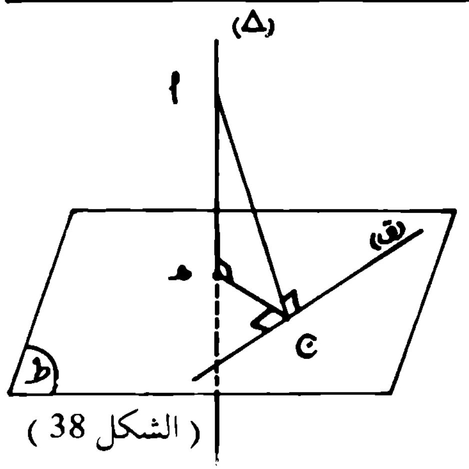
- يتعامد مستقيمان في الفضاء إذا وفقط إذا كان أحدهما عموديا على مستو يحتوي على الآخر

(الشكل 37)

4.2 ـ تمرين محلول :

(ط) مستو و (Δ) مستقيم عمودي على (ط) في النقطة هـ
(ق) مستقيم من (ط) لا يشمل هـ
ا نقطة من (Δ) تختلف عن هـ وَ م نقطة من (ق)
برهن أن : (هـ م) ⊥ (ق) ⟸ (ا م) ⊥ (ق)

الحل :



(الشكل 38)

(ق) عمودي على (Δ) لأن
(Δ) عمودي على (ط)

- إذا كان (هـ م) عموديا على (ق) يكون (ق) عموديا على المستقيمين المتقاطعين (هـ م) و (Δ) وبالتالي يكون (ق) عموديا على المستوي (ا هـ م).

إذن : (ق) عمودي على (ا م)

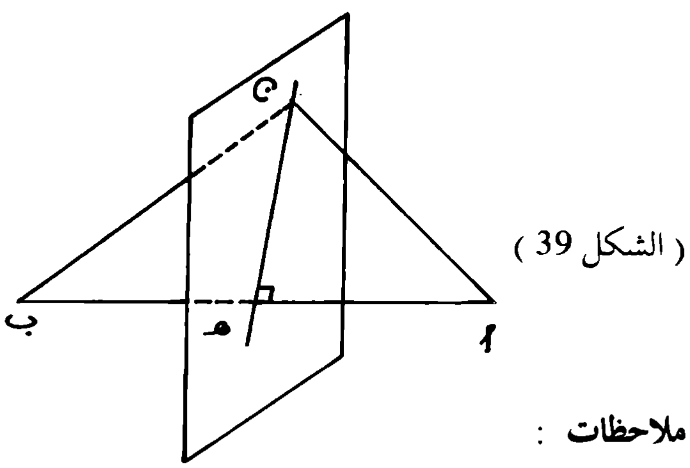
- إذا كان (ا م) عموديا على (ق) يكون (ق) عموديا على المستقيمين المتقاطعين (ا م) و (Δ) وبالتالي يكون (ق) عموديا على المستوي (ا هـ م)

إذن (ق) عمودي على (هـ م)

5.2 ـ المستوي المحوري لقطعة مستقيم :

تعريف :

ا ، ب نقطتان متمايزتان ، م منتصف القطعة [ا ب]
المستوي العمودي على المستقيم (ا ب) في النقطة م يسمى المستوي المحوري للقطعة [ا ب]



(الشكل 39)

ملاحظات :

- في المستوي المحوري للقطعة [أ ب] كل مستقيم يشمل منتصف [أ ب] هو محور للقطعة [أ ب]
- كل محور للقطعة [أ ب] هو مستقيم من المستوي المحوري للقطعة [أ ب]

نتيجة :

في المستوي نعلم أنه إذا كانت أ ، ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط ن التي تحقق المساواة ن أ = ن ب هي محور القطعة [أ ب] .

وفي الفضاء لدينا نتيجة مماثلة :

إذا كانت أ و ب نقطتين متمايزتين فإن مجموعة النقط ن التي تحقق المساواة ن أ = ن ب هي المستوي المحوري للقطعة [أ ب]

3 ـ المستويات المتعامدة

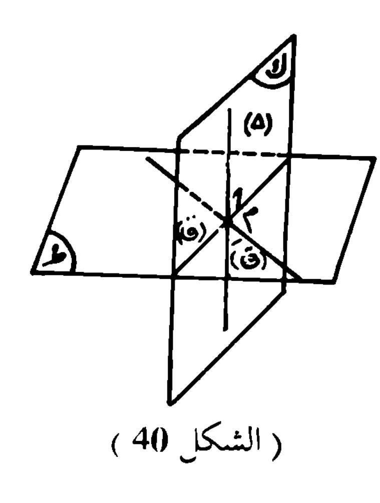
1.3 ـ تعريف :

(ط) مستو و (∆) مستقيم عمودي على (ط)

كل مستو يحتوي على (∆) يسمى مستويا عموديا على (ط)

التعريف :

يكون مستو (ك) عموديا على مستو (ط) إذا وفقط إذا احتوى (ك) على مستقيم عمودي على (ط)



(الشكل 40)

- إذا كان المستوي (ك) عموديا على المستوي (ط) فإن (ك) يحتوي على مستقيم (Δ) يعامد (ط).

لتكن م نقطة تقاطع (Δ) و (ط). المستويان (ط) و (ك) متقاطعان وتقاطعهما مستقيم (ق) يشمل م

ليكن (قَ) المستقيم من (ط) العمودي على (ق) في النقطة م المستقيم (قَ) عمودي على المستقيمين المتقاطعين (Δ) و (ق) من (ك) . فهو عمودي على (ك)

إذن المستوي (ط) عمودي على المستوي (ك)

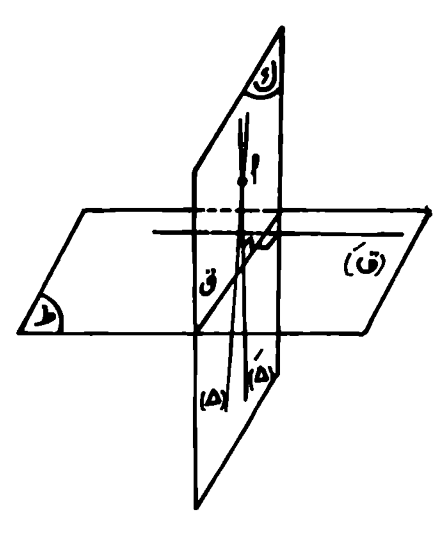
ومنه النتيجة التالية

إذا كان مستو (ك) عموديا على مستو (ط) فإن المستوي (ط) عمودي على المستوي (ك) ونقول إن المستويين (ك) و (ط) متعامدان

3 . 2 ـ نظريات :

1. إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكانت أ نقطة من (ك) فإن (ك) يحتوي على المستقيم الذي يشمل أ ويعامد ط

البرهان :



(الشكل 41)

(ط) و (ك) مستويان متعامدان تقاطعهما المستقيم (ه) .

أ نقطة من (ك) ، (Δ) مستقيم يشمل أ ويعامد (ط) .

(Δ') مستقيم من (ك) يشمل أ ويعامد (ه). بما أن المستويين (ط) و (ك) متعامدان فإنه يوجد ، في المستوي (ط) مستقيم (ه') يعامد المستوي (ك) .

المستقيم (ه') عمودي على كل مستقيم من (ك) فهو عمودي على (Δ')

لدينا :

(Δ') يعامد المستقيمين المتقاطعين (ه) و (ه') فهو إذاً عمودي على المستوي (ط)

المستقيمان (Δ') و (Δ) يشملان النقطة أ ويعامدان المستوي (ط) فهما متطابقان

إذن (Δ) ⊂ (ك)

• مما سبق نستنتج أيضا النتيجة التالية

إذا كان (ك) و (ط) مستويين متعامدين وكان (ه) مستقيم تقاطعهما فإن كلّ مستقيم من (ك) عمودي على (ه) يكون عموديا على (ط)

2. إذا كان (ك) و (ك') مستويين متقاطعين وكان كل منهما عمودياً على مستو (ط) فإن مستقيم تقاطع (ك) و (ك') يكون عمودياً على (ط)

البرهان :

لتكن ا نقطة من مستقيم تقاطع (ك) و (كَ) . حسب النظرية السابقة كل من (ك) و (كَ) يحتوي على المستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ط) .

إذاً هذا المستقيم هو مستقيم تقاطع (ك) و (كَ)

(الشكل 42)

3. إذا كان (ك) و (كَ) مستويين متوازيين وكان (ط) مستويا عموديا على (ك) فإن (ط) عمودي على (كَ)

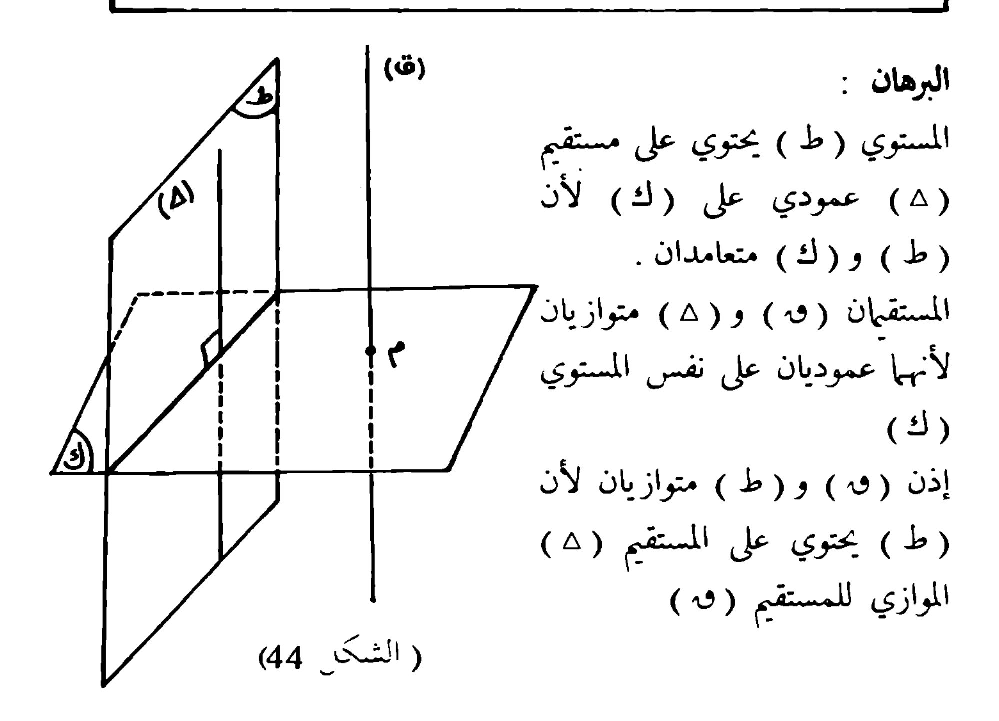
البرهان :

بما أن (ك) و (ط) متعامدان فإن (ط) يحتوى على مستقيم عمودي على (ك) وهذا المستقيم عمودي على (كَ) لأن (ك) و (كَ) متوازيان

إذن (ط) عمودي على (كَ)

(الشكل 43)

4. إذا كان مستقيم (ق) ومستو (ط) عموديين على نفس المستوي (ك) فإن (ق) و (ط) متوازيان



(الشكل 44)

البرهان :

المستوي (ط) يحتوي على مستقيم (Δ) عمودي على (ك) لأن (ط) و (ك) متعامدان .

المستقيمان (ق) و (Δ) متوازيان لأنهما عموديان على نفس المستوي (ك)

إذن (ق) و (ط) متوازيان لأن (ط) يحتوي على المستقيم (Δ) الموازي للمستقيم (ق)

تمـارين

المستويات والمستقيمات في الفضاء

1. (ط) مستو . ا نقطة من (ط) و (△) مستقيم في (ط) لايشمل النقطة ا . ب نقطة من الفضاء لاتنتمي إلى (ط) .
أثبت أن المستقيمين (△) و (اب) ليسا في مستو واحد .

2. (△) و (△′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا ، ب نقطتان مختلفتان من (△) .
ا′ ، ب′ نقطتان مختلفتان من (△′) .
أثبت أن النقط ا ؛ ب ؛ ا′ ؛ ب′ ليست في مستو واحد .

3. (△) و (△′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا نقطة من (△) وَ ا′ نقطة من (△′) .
(△) و ا′ يعينان مستويا (ط) ؛ (△′) و ا يعينان مستويا (ط′) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ط) و (ط′) .

4. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط ليست في مستو واحد .
1) أثبت أن ثلاث نقط منها ليست على إستقامة واحدة .
2) عيّن عدد المستويات المعيّنة بالنقط الأربع .
ثم عيّن مستقيمات تقاطع هذه المستويات مثنى مثنى

5. (ط) مستو . (△) و (△′) مستقيمان في (ط) متقاطعان . ه نقطة من الفضاء لاتنتمي إلى (ط) .
(ك) المستوي المعيّن بالنقطة ه والمستقيم (△) .
(ك′) المستوي المعيّن بالنقطة ه والمستقيم (△′) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك′) .

6. (ط) مستو . (△) و (△′) مستقيمان في (ط) متقاطعان في نقطة ا .
(ى) مستقيم يقطع (ط) في نقطة م تختلف عن ا .
عيّن مجموعة المستقيمات التي تقطع في آن واحد المستقيمات الثلاثة (△) ، (△′) و (ى) .

7. (△) و (△′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا ، ب نقطتان من (△) و ا′ ، ب′ نقطتان من (△′) .
أثبت أن المستقيمين (ا ا′) و (ب ب′) ليسا في مستو واحد .

8. (ط) مستو . ب ، ح نقطتان مختلفتان من (ط) .
ا نقطة لاتنتمي إلى (ط) . م نقطة من المستقيم (ا ب) و ن نقطة من المستقيم (ا ح)
أثبت أنه إذا قطع المستقيم (م ن) المستوي (ط) فإنه يقطع المستقيم (ب ح) .

9. ا ب ح ى رباعي في مستو (ط) . نفرض أن ا ب ح ى ليس شبه منحرف .
م نقطة لاتنتمي إلى (ط) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م ا ب) و (م ح ى) .
ثم مستقيم تقاطع المستويين (م ا ى) و (م ب ح) .

10. ا ب ح ى متوازي أضلاع في مستو (ط) .
م نقطة لا تنتمي إلى (ط) .
عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م ا ح) و (م ب ى) .

11. ($ط_1$) و ($ط_2$) مستويان متقاطعان و (△) مستقيم تقاطعهما .
ا ، ب نقطتان مختلفتان من ($ط_1$) بحيث المستقيم (ا ب) يقطع المستقيم (△) في النقطة ح .
م نقطة لا تنتمي إلى المستويين ($ط_1$) و ($ط_2$) بحيث يقطع المستقيمان (م ا) و (م ب) المستوي ($ط_2$) في النقطتين ا′ ، ب′ على الترتيب .
أثبت أن النقط الثلاث ا′ ، ب′ ، ح على استقامة واحدة .

12. (ط) مستو . (Δ) مستقيم يقطع (ط) في نقطة هـ .
ا ، ب نقطتان من (Δ) و ن نقطة من الفضاء بحيث يقطع المستقيمان (ن ا)
و (ن ب) المستوي (ط) في النقطتين ا′ ، ب′ .
أثبت أن النقط الثلاث هـ ، ا′ ؛ ب′ على إستقامة واحدة .

13. ا ب ﺣ مثلث في مستو (ط) .
ا′ ؛ ب′ ؛ ﺣ′ منتصفات القطع [ب ﺣ] ، [ﺣ ا] ، [ا ب] على الترتيب .
ء نقطة لا تنتمي إلى المستوي (ط) .
أثبت أن المستويات (ء ا ا′) ؛ (ء ب ب′) ؛ (ء ﺣ ﺣ′) تتقاطع حسب مستقيم واحد يطلب تعيينه .

14. ا ب ﺣ ء رباعيّ وجوه . م منتصف القطعة [ا ء] .
هـ مركز ثقل المثلث ا ب ﺣ .
- أثبت أن المستقيم (م هـ) يقطع المستوي (ب ﺣ ء) في نقطة ي
- أثبت أن الرباعي ب ي ﺣ ء متوازي أضلاع .

15. ا ب ﺣ ء رباعيّ وجوه . هـ مركز ثقل المثلث ب ﺣ ء .
هـ′ مركز ثقل المثلث ا ﺣ ء .
أثبت أن المستقيمين (ا هـ) و (ب هـ′) متقاطعان .

16. ا ب ﺣ ء رباعي وجوه . (ط) هو المستوي (ب ﺣ ء) .
(Δ) مستقيم من (ط) يقطع المستقيمات (ب ﺣ) ؛ (ﺣ ء) ؛
(ب ء) في ثلاث نقط مختلفة . ن نقطة من القطعة [ا ﺣ] .
(ك) هو المستوي المعيّن بالنقطة ن والمستقيم (Δ) .
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ا ب ﺣ) .
2) عيّن تقاطع المستقيم (ا ب) مع المستوي (ك) .
3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ا ب ء) .
أثبت أن هذا المستقيم يقطع المستقيم (ب ء) في نقطة تنتمي إلى (Δ) .

17. (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
ا نقطة من (ق$_1$) و (Δ) المستقيم الذي يشمل ا ويوازي (ق$_2$) .
1) أثبت أن المستوي (ط) المعيّن بالمستقيمين (ق$_1$) و (Δ) يوازي تماماً (ق$_2$) .
2) بيّن أن المستوي (ط) ثابت ، عندما تتغير النقطة ا في (ق$_1$)

18. (ق$_1$) و (ق$_2$) مستقيمان ليسا في مستو واحد . و ا نقطة من الفضاء .
أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل ا ويوازي المستقيمين (ق$_1$) و (ق$_2$) .

19. (ق) و (Δ) مستقيمان متوازيان من مستو (ط) .
(ك) و (ك') مستويان متقاطعان يحتويان على (ق) و (Δ) على الترتيب .
(Δ') مستقيم تقاطع المستويين (ك) و (ك') .
ما هي وضعية المستقيم (Δ') بالنسبة إلى المستوي (ط) .

20. (ط) و (ك) مستويان متقاطعان و (ق) مستقيم تقاطعهما .
(Δ) مستقيم بحيث (Δ) و (ق) ليسا في مستو واحد .
و د نقطة من (Δ) .
أ) ارسم المستويين (ط') و (ك') اللذين يشملان د ويوازيان (ط) و (ك) على الترتيب
2) أثبت أن (ط') و (ك') متقاطعان .
3) إذا كان (ق') مستقيم تقاطع المستويين (ط') و (ك')
ما هي وضعية المستقيم (ق') بالنسبة إلى كل من (ط) ، (ك) و (ق) ؟

21. (ق) مستقيم يوازي مستويا (ط) .
ا ، ب نقطتان مختلفتان من (ق) . م ، د نقطتان من (ط) .
1) أثبت أن المستويين (ا ب م) و (ا ب د) يقطعان (ط) .
2) إذا كان (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ا ب م) و (ط) وإذا كان (Δ') مستقيم تقاطع المستويين (ا ب د) و (ط)
أثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ') متوازيان .
في أية حالة يتطابق فيها المستقيمان (Δ) و (Δ') ؟

22. ا ب حـ ء رباعي وجوه .
ا′ ، ب′ ، حـ′ ، ء′ منتصفات القطع [ا ب] ، [ب حـ] ، [حـ ء] ، [ء ا]
على الترتيب .
أثبت أن الرباعي ا′ ب′ حـ′ ء′ متوازي أضلاع .

23. ا ب حـ ء رباعي وجوه . (ط) مستو يوازي كلا من المستقيمين (ا ب)
و (حـ ء) ويقطع المستقيمات (ا حـ) ، (ا ء) ، (ب ء) ، (ب حـ) في النقط
م ، ﻫ ، م′ ، ﻫ′ على الترتيب .
بيّن أن الرباعي م ﻫ م′ ﻫ′ متوازي أضلاع .

24. (ف) و (ف′) مستقيمان ليسا في مستو واحد .
(Δ) مستقيم لا يوازي (ف) ولا يوازي (ف′) .
أنشىء مستقيما (Δ′) يوازي (Δ) ويقطع كلا من (ف) و (ف′)

25. (ط) مستو ، (Δ) مستقيم و ا نقطة .
أنشىء مستقيما يشمل ا ويقطع (Δ) ويوازي (ط) .

26. (ط) و (ط′) مستويان و ا نقطة .
أنشىء مستقيما يشمل ا ويوازي (ط) و (ط′) .

27. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط من مستو (ط) .
نفرض أن المستقيمين (ا ب) و (حـ ء) يتقاطعان في النقطة ك
وأن المستقيمين (ا ء) و (ب حـ) يتقاطعان في النقطة ل .
م نقطة لا تنتمي إلى (ط) .
ليكن (ط′) مستويا يقطع كلا من المستقيمات (م ا) ، (م ب) ، (م حـ) ،
(م ء) في النقط α ، β ، δ ، λ على الترتيب .
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (م ا ب) و (م حـ ء) .
ثم عيّن نقطة تقاطع المستقيم (م ك) والمستوي (ط′) .
2) كيف يؤخذ المستوي (ط′) حتى يكون :
($\alpha\beta$) // ($\delta\lambda$) أو ($\alpha\lambda$) // ($\beta\delta$) ؟

3) لتكن ه نقطة من الفضاء .
أنشىء المستوي (ط′) الذي يشمل النقطة ه بحيث يكون الرباعي α β δ λ متوازي أضلاع .

28. (ط) و (ط′) مستويان غير متوازيين .
ا ب حـ ء متوازي أضلاع في (ط) . ا′ ، ب′ ، حـ′ ، ء′ أربع نقط من المستوي (ط′) بحيث تكون المستقيمات (ا ا′) ، (ب ب′) ، (حـ حـ′) ، (ء ء′) متوازية .
ما نوع الرباعي ا′ ب′ حـ′ ء′ ؟

29. ا ب حـ ء متوازي أضلاع في مستو (ط) .
م ، ه نقطتان لا تنتميان إلى (ط) بحيث يكون الرباعي ا م حـ ه متوازي أضلاع .
أثبت أن (ب م) // (ء ه) وأن (ب ه) // (م ء) .

30. (ط) و (ط′) مستويان متوازيان تماماً .
ا ب حـ مثلث في (ط) . م ، ه نقطتان متمايزتان من (ط′) .
1) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ا ب ه) و (ط′) .
2) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ا حـ م) و (ط′)
3) عيّن مستقيم تقاطع المستويين (ا ب ه) و (ا حـ م) .

31. [ا س) و [ب ع) نصفا مستقيمين غير محتويين في نفس المستوي .
م ، ه نقطتان حيث : م ∈ [ا س) ؛ ه ∈ [ب ع) و ا م = ب ه
1) أنشىء المستوي (ط) الذي يحتوي على [ب ع) ويوازي [ا س)
2) أثبت أن المستقيم الذي يشمل النقطة م ويوازي المستقيم (ا ب) يقطع المستوي (ط) في نقطة م′ .
عيّن مجموعة النقط م′ عندما تتغير النقطة م في [ا س) .
3) إذا كانت α ، β ، δ منتصفات القطع [ا ب] ، [م م′] و [م ه] على الترتيب ، أثبت أن المستوي (α β δ) يوازي المستوي (ط) .

التعامد في الفضاء

32. ا ب حـ ء ا' ب' حـ' ء' مكعب

أثبت أن المستقيمين (ا ب) و (ء ء') متعامدان

وأن المستقيمين (ب ء) و (ا' حـ') متعامدان .

33. (Δ) و (Δ') مستقيمان متقاطعان في مستو (ط) .

(ك) و (ك') مستويان عموديان على (Δ) و (Δ') على الترتيب .

أثبت أن المستويين (ك) و (ك') متقاطعان وأن مستقيم تقاطعهما عمودي على (ط) .

34. (ط) و (ط') مستويان متقاطعان ومستقيم تقاطعهما (Δ) .

ا نقطة لا تنتمي إلى المستويين (ط) و (ط') .

المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على (ط) يقطعه في النقطة هـ .

المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على (ط') يقطعه في النقطة هـ'

1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي (ا هـ هـ') .

2) إذا كانت م نقطة تقاطع (Δ) مع المستوي (ا هـ هـ')

أثبت أن (م ا) عمودي على (Δ) .

35. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .

ا نقطة من (ق) ؛ هـ نقطة من (Δ) بحيث يكون (ا هـ) عموديا على (Δ) .

أثبت أنه مهما كانت النقطة ج من (ق) فإن (ج هـ) عمودي على (Δ) .

36. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في النقطة ا .

(ق') المستقيم الذي يشمل ا والعمودي على المستوي المعيّن بالمستقيمين (ق) و (Δ) .

1) أثبت أن (Δ) عمودي على المستوي (ط) المعيّن بالمستقيمين (ق) و (ق') .

2) أثبت أن (ط) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (ق) ويعامد (Δ) .

37. (ق) و (Δ) مستقيمان متعامدان وغير محتويين في نفس المستوي .

ا نقطة من (ق) و هـ نقطة من (Δ) بحيث : (ا هـ) $\perp$ (Δ) .

(ط) المستوي المعيّن بالنقطة ه والمستقيم (ق) .
1) أثبت أن (ط) عمودي على (Δ) .
2) أثبت أن (ط) هو المستوي الوحيد الذي يحتوي على (ق) ويعامد (Δ) .

38. 1) (Δ) مستقيم و م نقطة من (Δ) .
(ط) و (ط′) مستويان متقاطعان وتقاطعهما (Δ) .
(ق) المستقيم من (ط) الذي يشمل م ويعامد (Δ) ؛ (ق′) المستقيم من (ط′) الذي يشمل م ويعامد (Δ) .
أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد (Δ)
2) (Δ) مستقيم و م نقطة لا تنتمي إلى (Δ) ، (Δ′) المستقيم الذي يشمل م ويوازي (Δ) .
باستعمال نتيجة السؤال السابق ، أثبت أنه يوجد مستو وحيد يشمل النقطة م ويعامد المستقيم (Δ) .

39. (ط) مستو و ن نقطة من الفضاء .
(ق) و (ق′) مستقيمان متقاطعان من (ط) .
حسب التمرين السابق نعلم أنه يوجد مستو وحيد (ك) يشمل ن ويعامد (ق) ويوجد مستو وحيد (ك′) يشمل ن ويعامد (ق′) .
أثبت أن المستويين (ك) و (ك′) متقاطعان وأن مستقيم تقاطعهما (Δ) يعامد المستوي (ط) .
استنتج أنه يوجد مستقيم وحيد يشمل ن ويعامد المستوي (ط)

40. نعتبر ، في مستو (ط) ، دائرة (د) قطرها ا ب
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة ا .
ح نقطة من (Δ) و ن نقطة من (د) .
1) أثبت أن المستقيم (ب ن) عمودي على المستوي (ح ا ن) .
2) استنتج أن المثلث ح ن ب قائم .

41. ا ب ح ، ا ب د مثلثان متساويا الساقين وغير محتويين في نفس المستوي حيث ح ا = ح ب وَ د ا = د ب .

ي منتصف القطعة [ا ب]
1) أثبت أن المستقيم (ا ب) عمودي على المستوي (حـ ي ى) .
2) أثبت أن المستقيمين (ا ب) و (حـ ى) متعامدان .

42. ا ب حـ مثلث في مستو (ط) .
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة ا . م نقطة من (Δ) .
م′ نقطة من [ب حـ] ؛ ب′ نقطة من [م حـ] و ب″ نقطة من [ا حـ]
حيث : (م م′) ⊥ (ب حـ) و (ب ب′) ⊥ (م حـ) و (ب ب″) ⊥ (ا حـ)
1) أثبت أن (ا م′) عمودي على (ب حـ) .
2) أثبت أن (ب ب″) عمودي على المستوي (م ا حـ)
3) أثبت أن (م حـ) عمودي على المستوي (ب ب′ ب″)
4) إذا كانت هـ نقطة تقاطع المستقيمين (م م′) و (ب ب′)
وكانت هـ′ نقطة تقاطع المستقيمين (ا م′) و (ب ب″)
أثبت أن (هـ هـ′) عمودي على المستوي (م ب حـ)

43. ا ب حـ ى مستطيل في مستو (ط) .
(Δ) و (Δ′) المستقيمان العموديان على (ط) في النقطتين حـ ، ى على الترتيب .
ق نقطة من (Δ) و ق′ نقطة من (Δ′) حيث (ب ق) ⊥ (ا ق′)
1) أثبت أن (ا ب) عمودي على المستوي (ا ى ق′)
2) أثبت أن (ا ق′) عمودي على المستوي (ا ب ق)
3) أثبت أن (ب ق) عمودي على المستوي (ا ب ق′)
4) إذا كان هـ منتصف القطعة [ق ق′] ، أثبت أن النقطة هـ تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة [ا ب] .

44. ا ب حـ مثلث في مستو (ط) .
هـ نقطة تلاقي أعمدته و (Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة هـ . ى نقطة من (Δ) .
أثبت أن :
(ا ى) ⊥ (ب حـ) وَ (ب ى) ⊥ (ا حـ) و (حـ ى) ⊥ (ا ب) .

45. ا ب حـ ء رباعي وجوه بحيث يكون (ا ء) ⊥ (ب حـ) و (ب ء) ⊥ (ا حـ).
المستقيم الذي يشمل النقطة ء ويعامد المستوي (ا ب حـ) يقطع هذا المستوي في النقطة هـ.
أثبت أن هـ هي نقطة تلاقي أعمدة المثلث ا ب حـ.

46. 1) ا ب حـ ء مربع. عيّن مجموعة النقط م من الفضاء بحيث تكون الأطوال م ا، م ب، م حـ، م ء متساوية.
2) نفس السؤال إذا كان ا ب حـ ء مستطيلا.
3) نفس السؤال إذا كان ا ب حـ ء معينا.

47. (ط) و (ط′) مستويان متعامدان.
(Δ) مستقيم عمودي على (ط) و (Δ′) مستقيم عمودي على (ط′).
1) أثبت أن المستقيمين (Δ) و (Δ′) متعامدان.
2) أثبت أن: (Δ) // (ط′) و (Δ′) // (ط)

48. لتكن، في مستو (ط)، دائرة (ى) قطرها ا ب.
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة ا. حـ نقطة من (Δ).
م نقطة من (ى).
1) أثبت أن المستويين (حـ ا م) و (حـ ب م) متعامدان.
2) ا′ نقطة من القطعة]حـ ا[.
المستوي (ك) الذي يشمل ا′ ويعامد (حـ ا) يقطع (حـ م) في النقطة م′ ويقطع (حـ ب) في النقطة ب′.
أثبت أن المثلث ا′ م′ ب′ قائم.

49. (ى) دائرة في مستو (ط) مركزها م.
(Δ) المستقيم العمودي على (ط) في النقطة م.
حـ نقطة من (Δ)؛ ا نقطة من (ى) و (ق) المماس للدائرة (ى) في النقطة ا.
أثبت أن المستوي المعيّن بالنقطة حـ والمستقيم (ق) عمودي على المستوي (ا م حـ).

50. ا ب ح ء رباعي وجوه حيث : ا ب = ح ء و ا ء = ب ح و ا ح = ب ء .
ﻫ منتصف القطعة [ا ب] و ﻫ′ منتصف القطعة [ح ء] .
1) أثبت أن المستويين (ﻫ ح ء) و (ﻫ′ ا ب) متعامدان
2) أثبت أن المستوي (ﻫ ح ء) عمودي على المستويين (ا ب ح) و (ا ب ء)
وأن المستوي (ﻫ′ ا ب) عمودي على المستويين (ا ح ء) و (ب ح ء) .

محتويات الكتاب

الجزء الثاني

الباب السادس : المعادلات والمتراجحات

الباب السابع : حساب المثلثات

الباب الثامن : الدوال العددية

الباب التاسع : الهندسة الفضائية



MS - 1105

2002 - 2001

